

**集中講義@立教大学 2011**

# **観測的宇宙論の理論**

**松原隆彦**

(名古屋大学 基礎理論研究センター)

**@立教大学 2011/11/24-25 & 12/1-2**

# 星、銀河系、銀河団

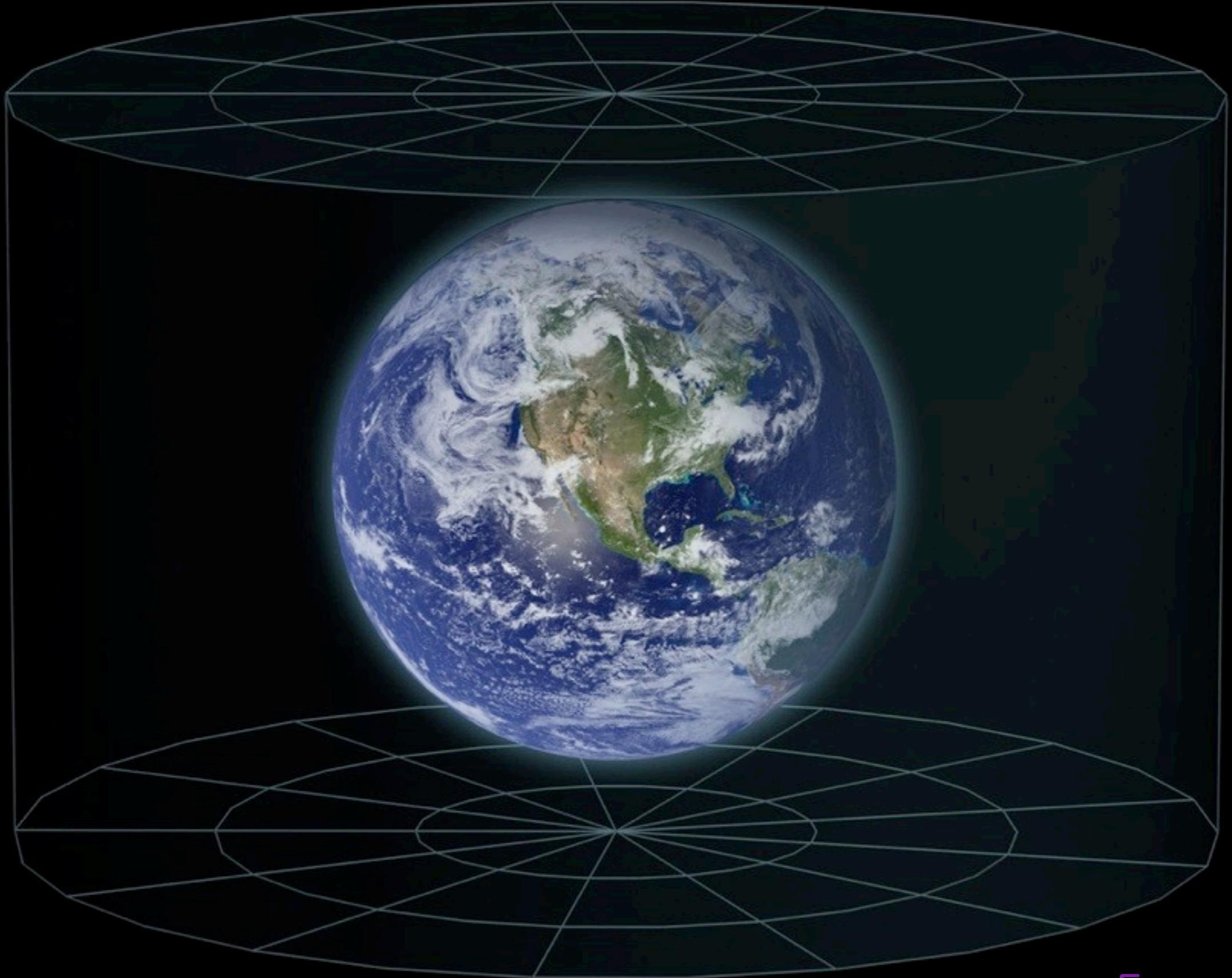
Viz: Stuart Levy, Bob Patterson, Donna Cox (NCSA)  
Hipparcos, Brent Tully, and other sources

# 星、銀河系、銀河団



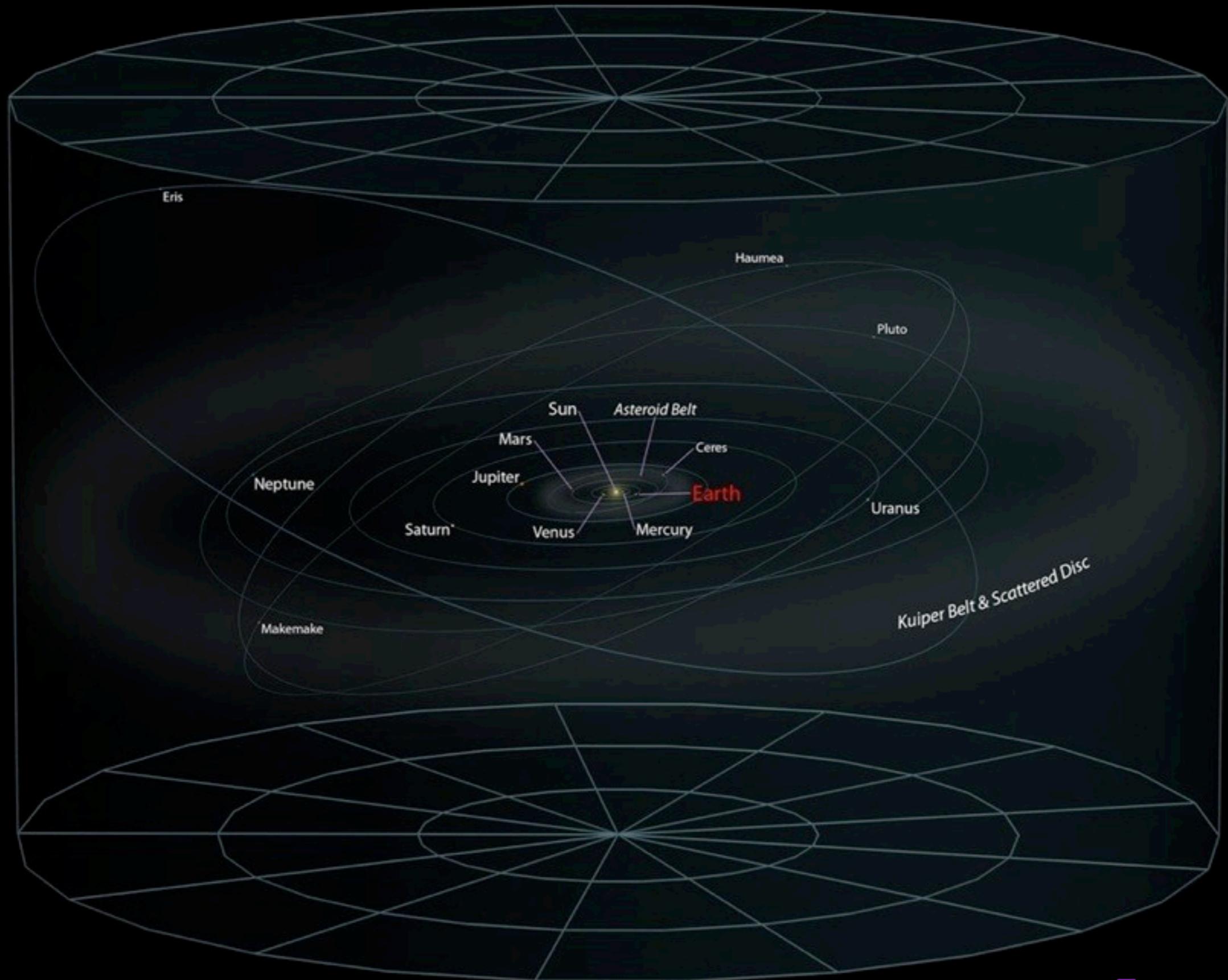
Viz: Stuart Levy, Bob Patterson, Donna Cox (NCSA)  
Hipparcos, Brent Tully, and other sources

# Earth



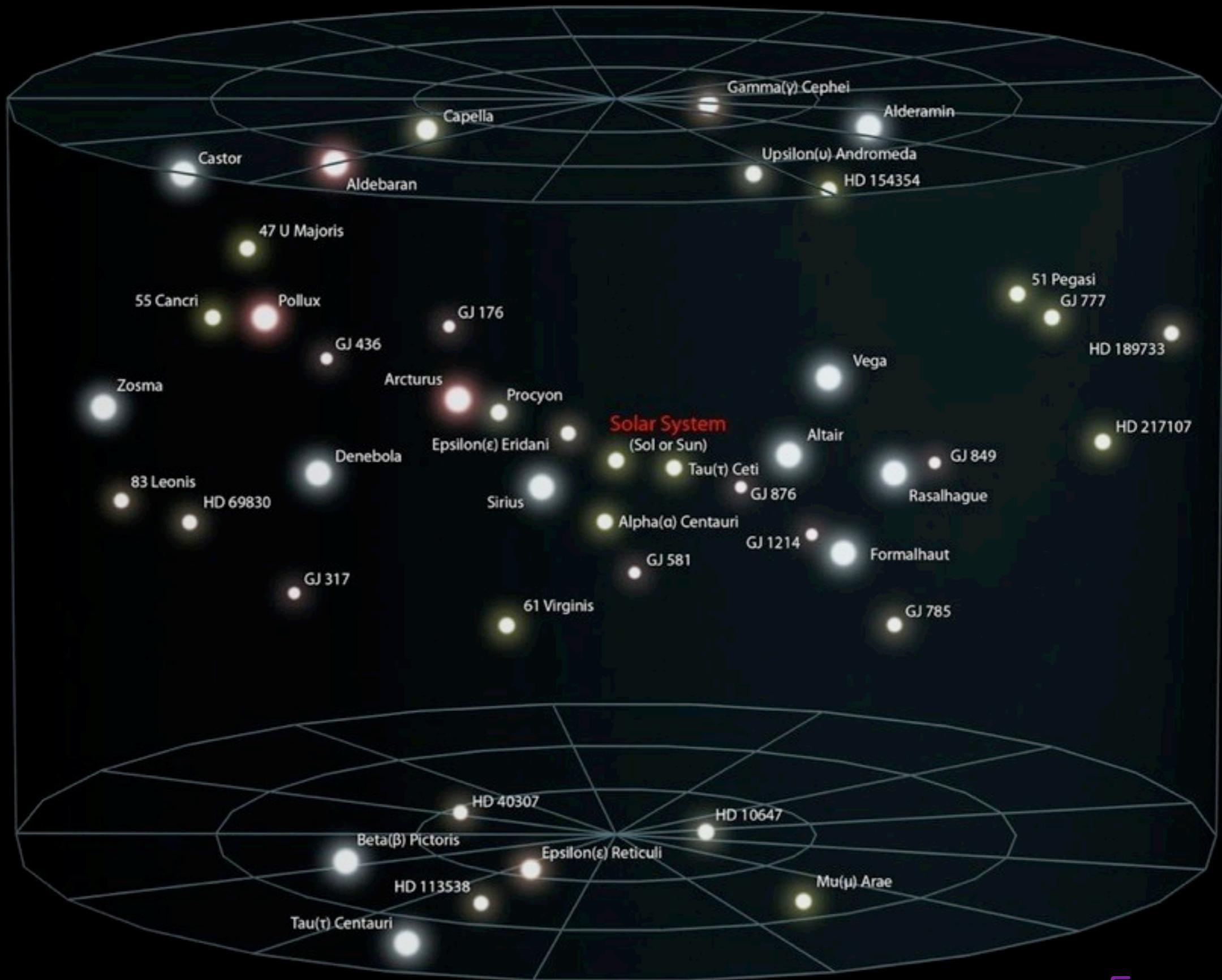
From: Wikipedia

# Solar System



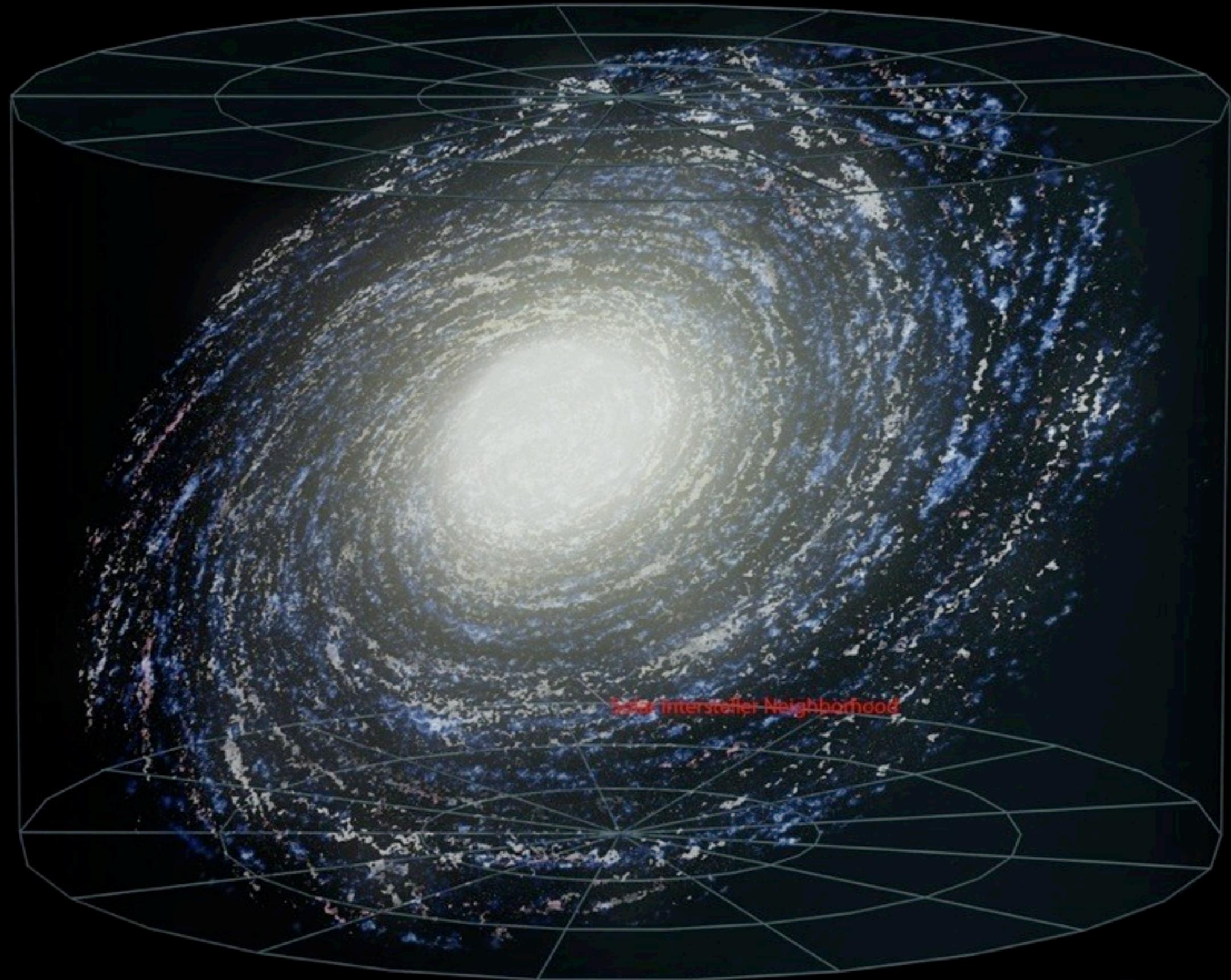
From: Wikipedia

# Solar Interstellar Neighborhood



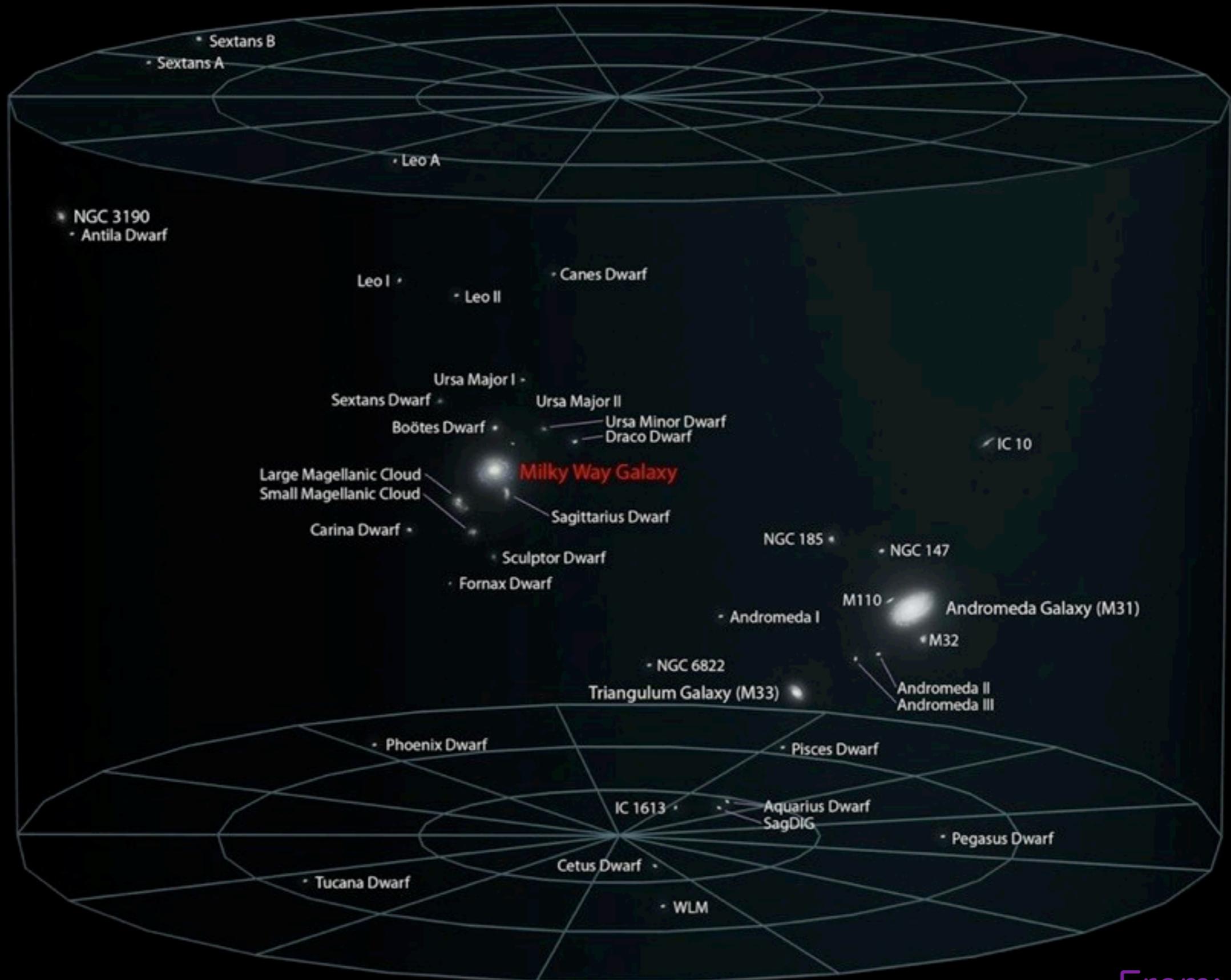
From: Wikipedia

# Milky Way Galaxy



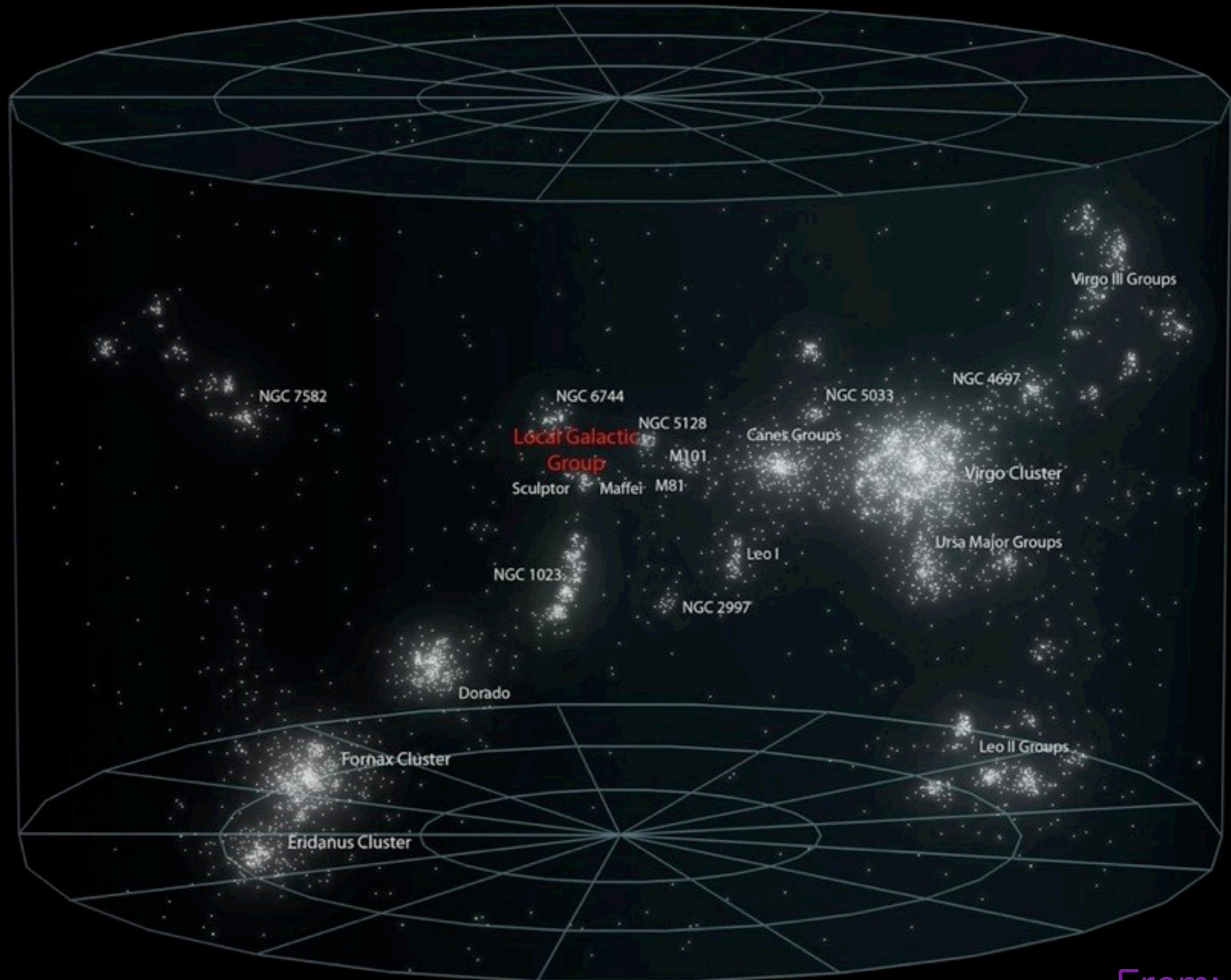
From: Wikipedia

# Local Galactic Group



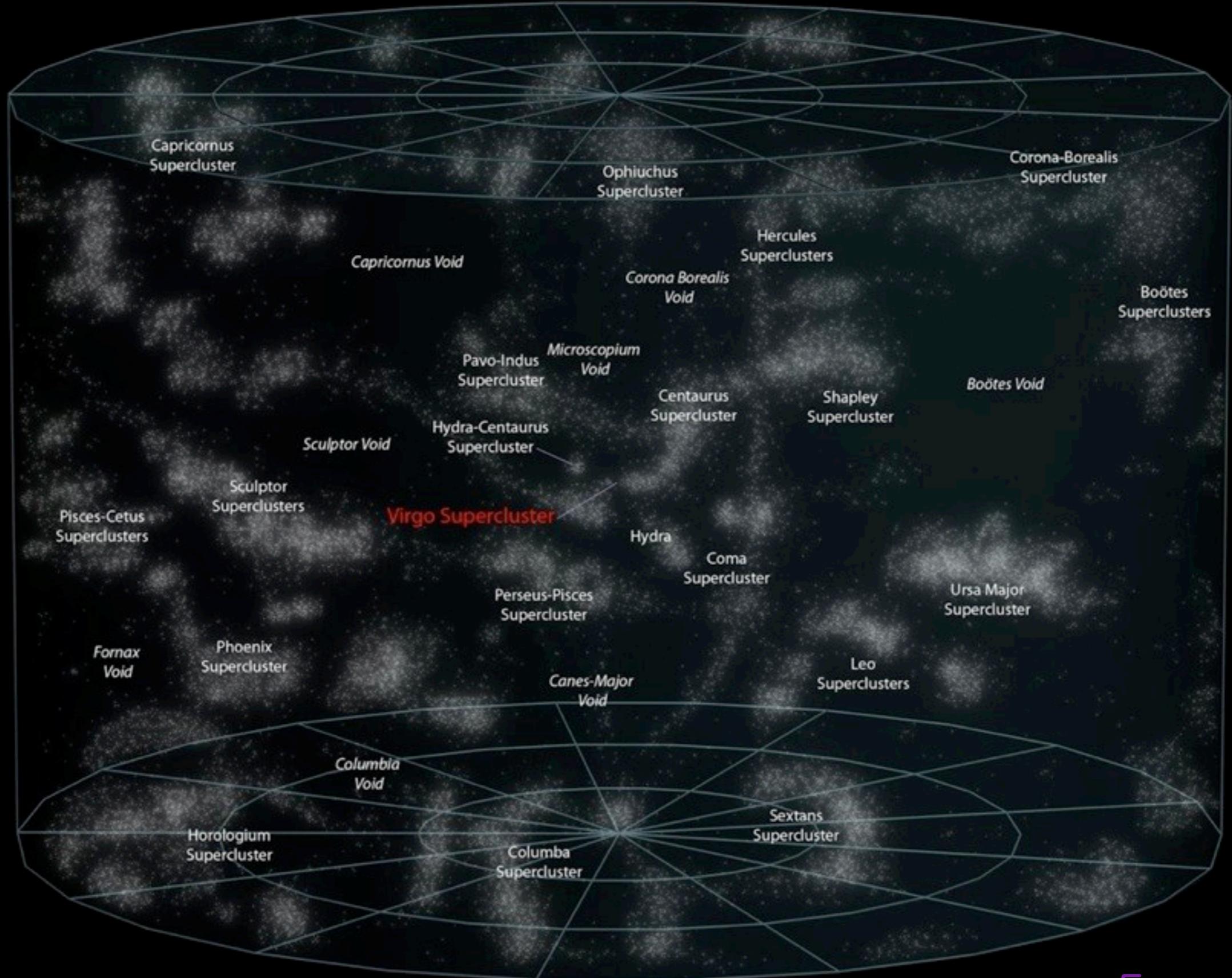
From: Wikipedia

# Virgo Supercluster



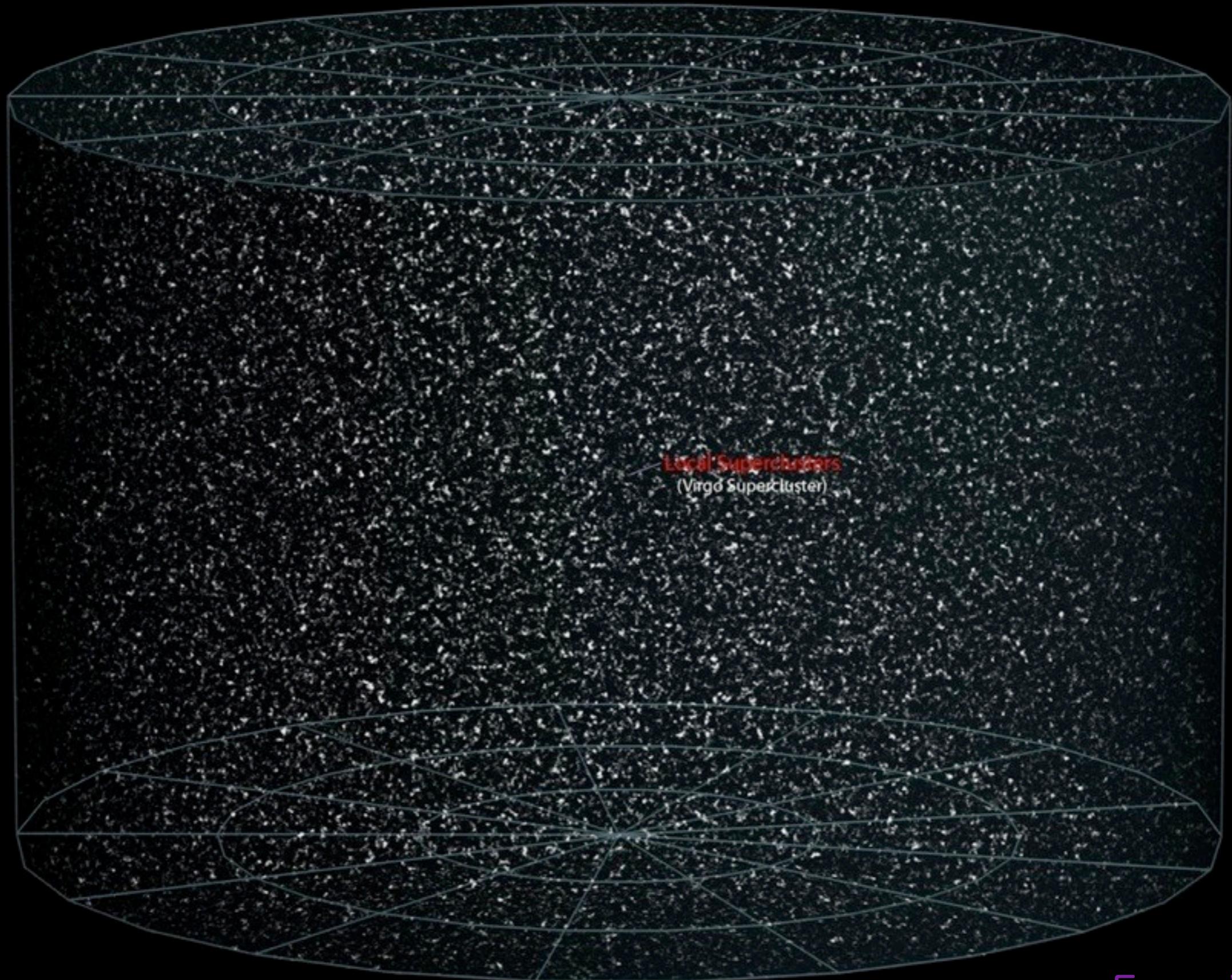
From: Wikipedia

# Local Superclusters



From: Wikipedia

# Observable Universe



From: Wikipedia

# 第一部

# 一様宇宙と観測量

# 宇宙の記述

- **ありのままの宇宙：複雑怪奇**
  - 完全に正確な記述は現実的に不可能
  - まず大きく近似：一様等方宇宙
  - そこから近似を正確にしていく：非一様性、ゆらぎ、、、
- **宇宙原理：宇宙は大局的に一様かつ等方**
  - 現代宇宙論の立脚点
  - 観測的に明らかな矛盾はない

# ロバートソン・ウォーカー計量 (RW計量)

- 宇宙時間  $t$

- 時刻一定面が一様等方宇宙となるような、宇宙全体に張った時間座標  $t$  が存在 (宇宙原理)

- 計量  $g_{\mu\nu}$  の形

- 等方性 :

- 特殊な方向ベクトルがないので  $g_{0i} = 0$

- 一様性 :

- $g_{00}$  は場所に無関係、宇宙時間  $t$  のみの関数
- $g_{ij}$  は3次元一様等方計量。空間曲率を  $K$  として、次の形のみ :

$$g_{ij}dx^i dx^j \propto \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

# ロバートソン・ウォーカー計量 (RW計量)

## • RW計量

- 定曲率  $K$  を持つ空間が、スケール因子  $a(t)$  の尺度で伸び縮みするという自由度だけ

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

- 規格化：スケール因子の現在値を 1  $a(t_0) = 1$
- もともと  $10 \times$  (空間点の数) 個あった  $g_{\mu\nu}$  の自由度が、一様等方性の縛りによって、定数  $K$  と関数  $a(t)$  だけの自由度に激減

# RW計量のアインシュタイン方程式

- RW計量  $\Rightarrow$  アインシュタイン・テンソル

$$G^0_0 = -\frac{3}{c^2} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 K}{a^2} \right], \quad G^0_i = G^i_0 = 0$$

$$G^i_j = -\frac{1}{c^2} \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 K}{a^2} \right] \delta^i_j$$

- アインシュタイン方程式

- $G$  の形より、エネルギー・運動量テンソルは次の形しか許されない

$$(T^\mu_\nu) = \text{diag.}(-\rho, p, p, p)$$

- 非等方ストレスやエネルギー・運動量流束はありえない
- 完全流体の形

# RW計量のアインシュタイン方程式

- アインシュタイン方程式（宇宙項があれば右辺に含める）

$$G^{\mu}_{\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\nu}$$

- (00)成分：フリードマン方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{c^2 K}{a^2}$$

- (ii)成分：（膨張加速度の式）

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p)$$

- 保存則（独立ではない）

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$$

# 宇宙論パラメータ

- ハッブル定数  $H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_0 = \dot{a}(t_0)$

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}}; \quad H_0 = 100 h \text{ km/s/Mpc}$$

- フリードマン方程式に現在時刻を代入:  $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 - c^2 K$

- 臨界密度

$$\rho_{c0} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \quad \rho_{c0}/c^2 = 1.88 \times 10^{-26} h^2 \text{ kg/m}^3$$

- 密度パラメータ

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2 H_0^2} \quad \Omega_{\alpha 0} = \frac{\rho_{\alpha 0}}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G \rho_{\alpha 0}}{3c^2 H_0^2}$$

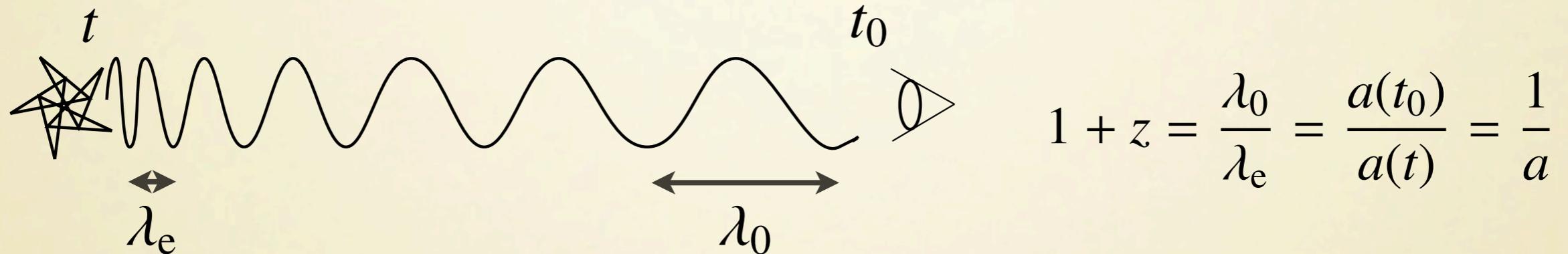
- 曲率パラメータ

$$\Omega_{K0} = -\frac{c^2 K}{H_0^2} \quad \Omega_0 + \Omega_{K0} = 1$$

# 赤方偏移

- 宇宙論的な赤方偏移

- 光の伝播中に宇宙膨張によって波長が伸びる



- 赤方偏移の関数としての膨張則 (←フリードマン方程式)

$$H(z) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_{de0} \exp\left(3 \int_0^z \frac{1+w}{1+z} dz\right) + \Omega_{K0}(1+z)^2}$$

$$w(z) = p_{de}(z) / \rho_{de}(z) \quad : \text{ダークエネルギーの} \\ \text{状態方程式パラメータ}$$

# 宇宙論的な距離

- 膨張宇宙では、距離の定義が明らかではない

- 宇宙膨張とともに天体までの距離が変化する

- 共動距離

- 現在時刻における実際の物理的距離（≠ 光の放出時点での距離）

$$x(z) = \int_t^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{c dz}{H(z)}$$

- 面積で定義された距離

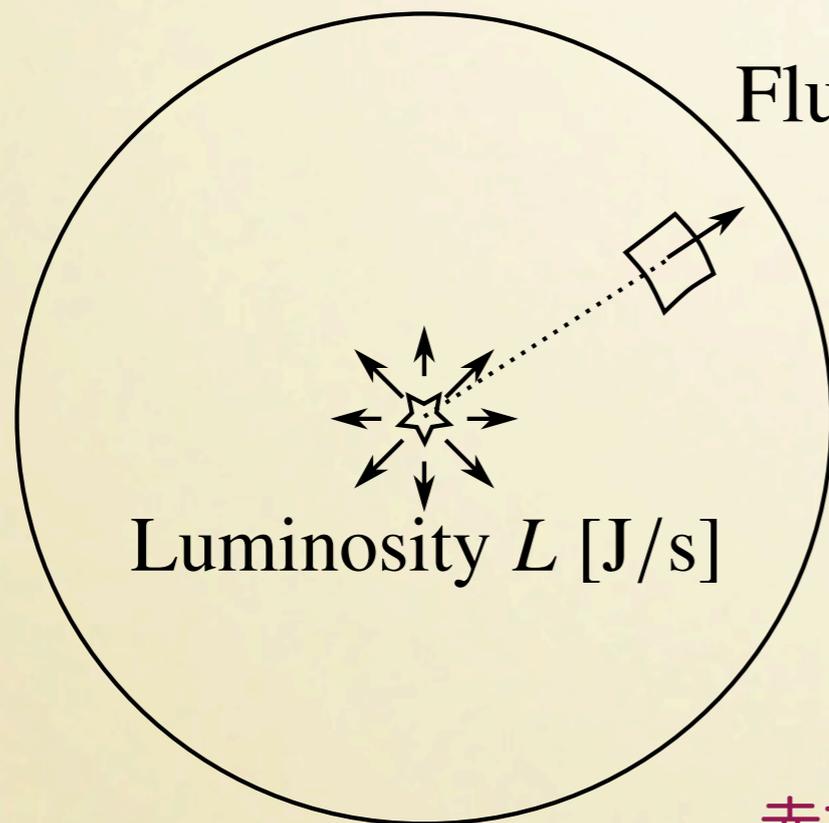
- 半径一定の面積が $4\pi r^2$ となるような距離（RW計量で採用された  $r$ ）

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = dx \Leftrightarrow r = S_K(x) \equiv \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}x), & (K > 0), \\ x, & (K = 0), \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2}x), & (K < 0). \end{cases}$$

# 宇宙論的な距離

- 光度距離

- 見かけの明るさから決める距離



光度距離：

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

$$d_L(z) = (1 + z) S_K(x(z))$$

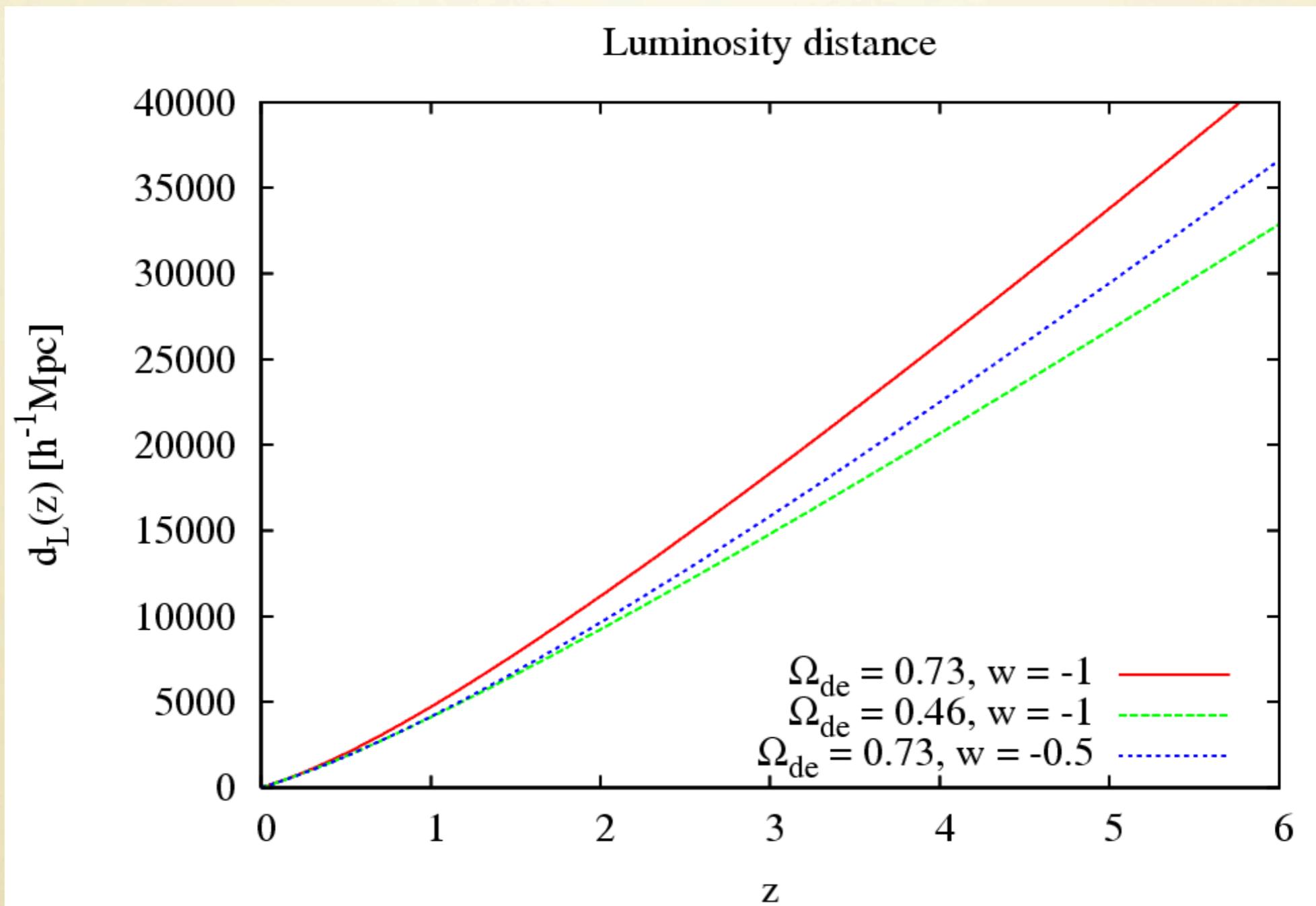
面積が広いほど遠い  
赤方偏移によりエネルギーが低下してさらに遠く見える

- 距離指標

$$m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right) = 5 \log \left[ \frac{d_L(z)}{c/H_0} \right] - 5 \log h + 42.384$$

# 宇宙論的な距離

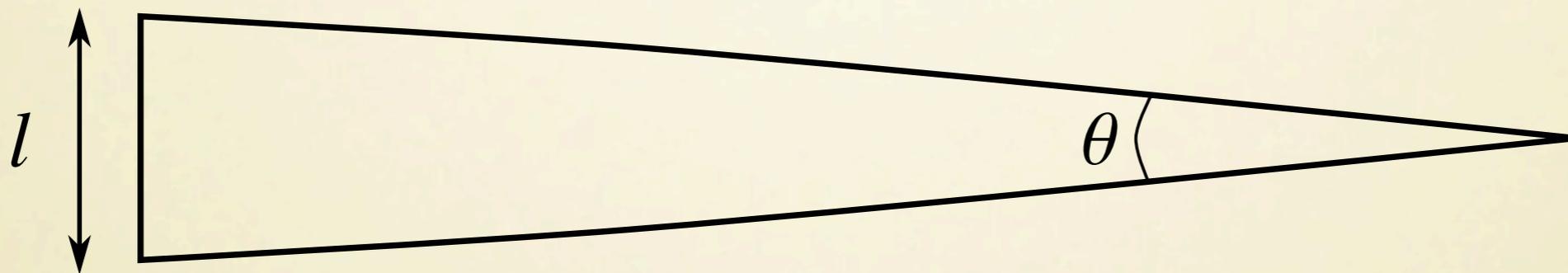
- 光度距離



# 宇宙論的な距離

- 角径距離

- 見かけの大きさから決める距離



角径距離：

$$d_A = \frac{l}{\theta}$$

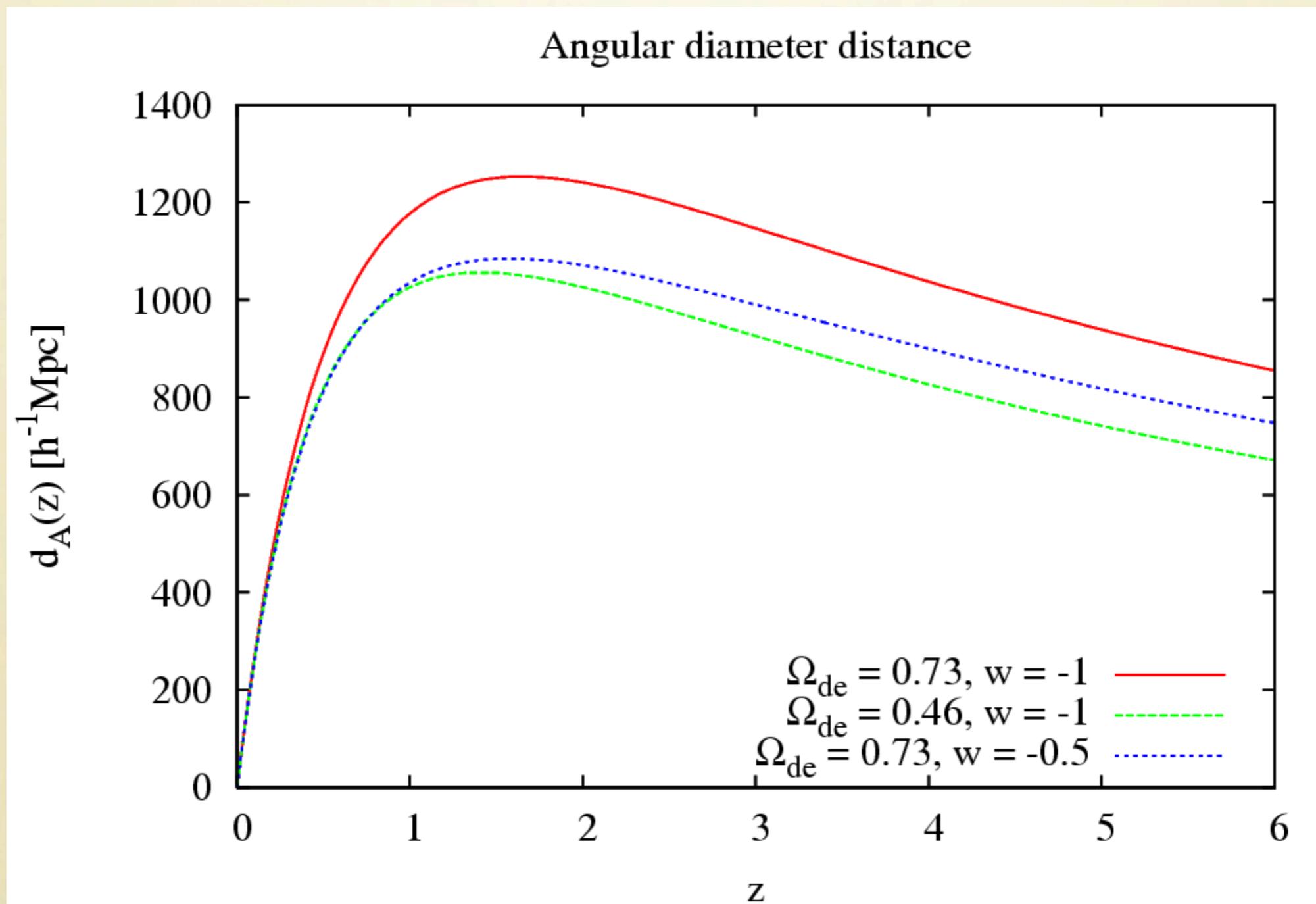
$$d_A(z) = \frac{S_K(x(z))}{1+z}$$

光源からの面積が広がるほど小さく遠い

宇宙膨張により角度が広がって近くに見える

# 宇宙論的な距離

- 角径距離



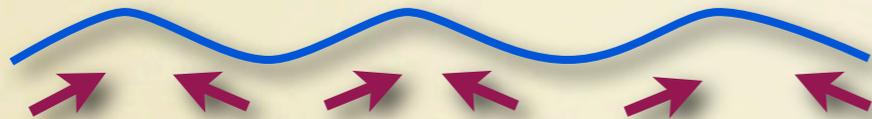
## 第二部

# 宇宙の非一様性！

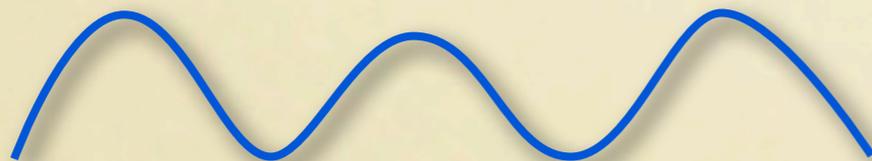
# 重力不安定性による構造形成

- 初期宇宙における微小な密度ゆらぎ
  - 量子論的不確定性による起源の可能性
- 小さなゆらぎが重力により増幅される
- 現在の宇宙の構造が形成される

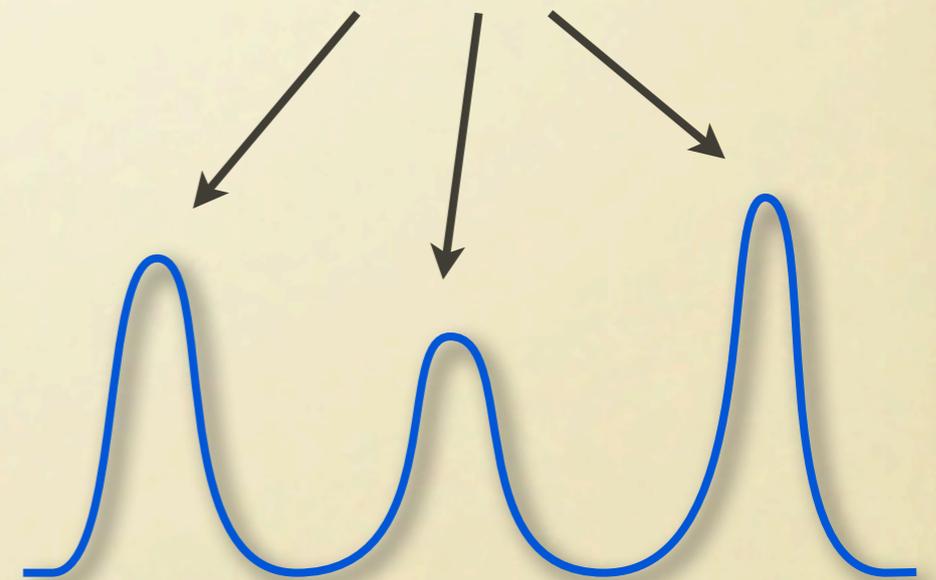
線形成長



非線形成長



構造の形成



# 膨張宇宙における重力不安定性

- 密度ゆらぎの非相対論的理論 (流体極限)

- 連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi$$

- 静止座標から膨張座標への変換

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

↓  
静止座標の速度

↓  
宇宙膨張による  
後退速度

↓  
共動速度

# 膨張宇宙における重力不安定性

- 座標変換：

$$(t, \mathbf{r}) \rightarrow (t, \mathbf{x}) : \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_r = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x - \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{x} \cdot \nabla_x, \quad \nabla_r = \frac{1}{a} \nabla_x$$

- 膨張座標における連続の式とオイラー方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla \Phi - \frac{1}{a \rho} \nabla p$$

- 膨張宇宙における重力ポテンシャル (定義)

$$\Phi \equiv \phi + \frac{1}{2} a \ddot{a} |\mathbf{x}|^2$$

# 膨張宇宙における重力不安定性

- 膨張宇宙における重力ポテンシャル

- 静止座標におけるポアソン方程式

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

- 膨張座標におけるポアソン方程式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\bar{\rho} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 4\pi Ga^2[\rho - \bar{\rho}]$$

- 平均質量密度

$$\bar{\rho}(t) = \bar{\rho}(t_0)/a^3(t)$$

# 膨張宇宙における重力不安定性

- 膨張宇宙におけるゆらぎの基礎方程式

Continuity: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$$

Euler: 
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{a}\nabla\Phi - \frac{1}{a\rho}\nabla p$$

Poisson: 
$$\Delta\Phi = 4\pi G a^2 [\rho - \bar{\rho}]$$

- 空間平均値まわりのゆらぎ

density perturbations: 
$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$$

pressure perturbations: 
$$\delta p(\mathbf{x}, t) \equiv p(\mathbf{x}, t) - \bar{p}(t)$$

# 膨張宇宙における重力不安定性

- ゆらぎ変数を用いた基礎方程式

Continuity: 
$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta) \mathbf{v}] = 0$$

Euler: 
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla \Phi - \frac{\nabla(\delta p)}{a \bar{\rho} (1 + \delta)}$$

Poisson: 
$$\Delta \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$$

# ジーンズ不安定性

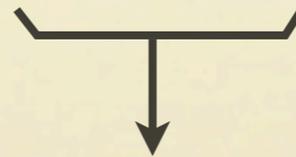
- 密度ゆらぎの線形化発展方程式

assume  $\delta, |\mathbf{v}| \ll 1,$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\Delta(\delta p)}{a^2 \bar{\rho}} = 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

- 圧力ゆらぎは密度ゆらぎとエントロピーゆらぎにより表される

$$p = p(\rho, S) \quad \Rightarrow \quad \delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \bar{\rho} \delta + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S$$



音速の2乗  $c_s^2$

# ジーンズ不安定性

- エントロピーゆらぎは成長しない

- 線形化したエントロピー保存の方程式より

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{a} \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta S = 0$$

- 断熱ゆらぎ（初期エントロピーゆらぎなし）の場合  
( $\delta S = 0$ )

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \left( 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta \right) = 0$$

# ジーンズ不安定性

- フーリエ変換

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, t), \quad \delta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t)$$

- フーリエ成分の発展方程式

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} - \left( 4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \right) \tilde{\delta} = 0$$

↓  
「加速」

↓  
「まさつ」  
(宇宙膨張による)

↓  
「ポテンシャル力」

# ジーンズ不安定性

- 「ポテンシャルカ」の符号が重要

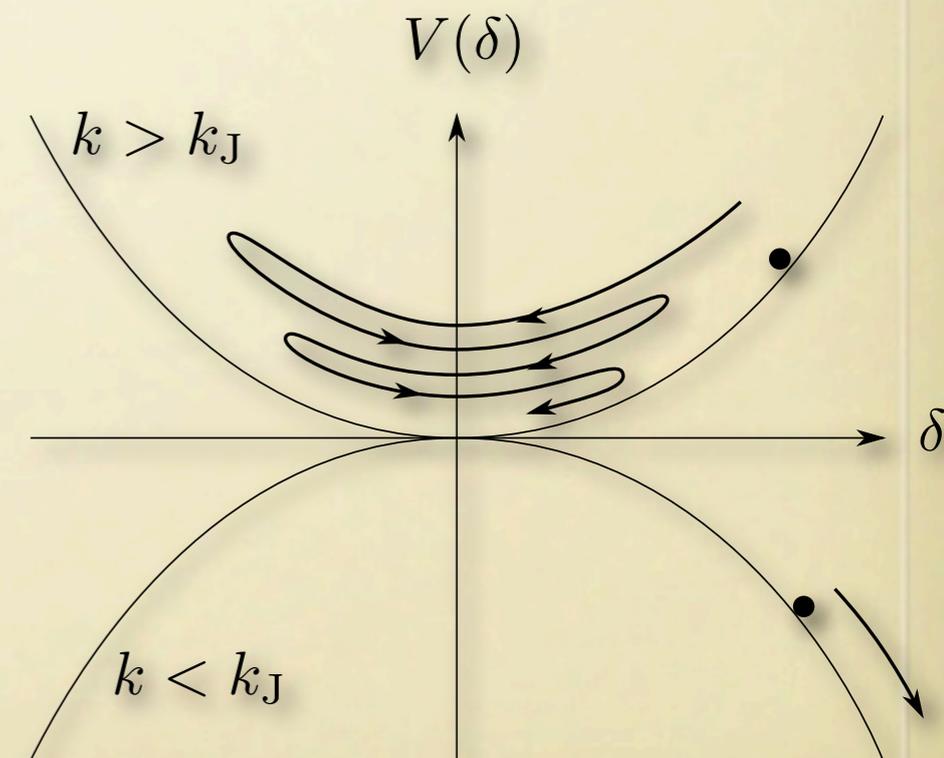
$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} - \left( 4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \right) \tilde{\delta} = 0$$
$$4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\delta} = 0 \text{ is stable}$$
$$4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\delta} = 0 \text{ is unstable}$$

- 1次元系との類比

$$V(\delta) \equiv -\frac{1}{2} \left( 4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \right) \delta^2$$

- ジーンズ波長

$$k_J \equiv \frac{a}{c_s} \sqrt{4\pi G \bar{\rho}}$$
$$\begin{cases} k > k_J & \Rightarrow \text{stable} \\ k < k_J & \Rightarrow \text{unstable} \end{cases}$$



# ジーンズ不安定性

- ジーンズ波数

$$k_J \equiv \frac{a}{c_s} \sqrt{4\pi G \bar{\rho}} \quad \begin{cases} k > k_J & \Rightarrow \text{stable} \\ k < k_J & \Rightarrow \text{unstable} \end{cases}$$

- ジーンズ長 (実距離)

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}} \quad \begin{cases} \lambda < \lambda_J & \Rightarrow \text{stable} \\ \lambda > \lambda_J & \Rightarrow \text{unstable} \end{cases}$$

- ジーンズ質量

$$M_J \equiv \frac{4\pi \bar{\rho}}{3} \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{\pi^{5/2}}{6} \frac{c_s^3}{\sqrt{G^3 \bar{\rho}}} \quad \begin{cases} M < M_J & \Rightarrow \text{stable} \\ M > M_J & \Rightarrow \text{unstable} \end{cases}$$

# ジーンズ不安定性

- 例：理想気体

$$p = \frac{\rho k_B T}{m} \text{ (per unit mass)}$$

$$\Rightarrow c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{\gamma k_B T}{m} \ll c^2 \text{ (for non-relativistic gas)}$$

- この場合、

$$\lambda_J \sim \frac{c_s}{\sqrt{G\bar{\rho}}} \ll \frac{c}{\sqrt{G\bar{\rho}}} \sim \frac{c}{H} \equiv l_H \text{ (Hubble scale)}$$

- つまり ホライズン内では物質優勢期にゆらぎが成長できる

# ジーンズ不安定性

- 例：放射

- ここまでの導出は非相対論的流体に対するものだが、ジーンズ・スケールは相対論的流体に対しても同じオーダーとなる

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad \Rightarrow \quad c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{1}{3}c^2 \text{ (for relativistic gas)}$$

$$\therefore \lambda_J \sim l_H$$

- つまり ホライズン内では放射優勢期にゆらぎが成長できない

# ジーンズ不安定性

- 例：バリオン・光子流体

- バリオンあたりのエントロピーは一定

$$\frac{s}{n_b} \propto \frac{\rho_r^{3/4}}{\rho_b} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_r} \right)_S = \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_r} = \frac{3}{4} \frac{a}{a_{\text{eq}}}$$

- したがって、

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{(\partial p_r / \partial \rho_r)_S}{1 + (\partial \rho_b / \partial \rho_r)_S} = \frac{c^2}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_r} \right)^{-1} = \frac{c^2}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)^{-1}$$

- 光子のエネルギー密度の方が大きい等密度時以前には重力成長できない

- 等密度時以降、光子の脱結合時まで：ジーンズ質量は

$$M_J \simeq 1.9 \times 10^{16} (\Omega_{b0} h^2)^{-2} M_\odot \quad a_{\text{eq}} \ll a < a_{\text{dec}}$$

- 銀河の典型的な質量は  $M_{\text{galaxy}} \sim 10^{12} M_\odot$  なので、脱結合時以前に銀河スケールの構造は成長できない (バリオン宇宙の困難)

# 密度ゆらぎの発展

- ジーンズ長よりも長いスケールの密度ゆらぎが成長できる

- 以下、この重力不安定性の起きる領域を考える：

$$k \ll k_J$$

- 発展方程式：
$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0$$

- 例：アインシュタイン・ドジッター宇宙 ( $\Omega_M = 1, \Omega_\Lambda = 0$ )

$$a \propto t^{2/3} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} \Rightarrow \delta = At^{2/3} + Bt^{-1}$$

$\delta$  grows as  $\delta \propto a$  at later times in an EdS universe

# 密度ゆらぎの発展

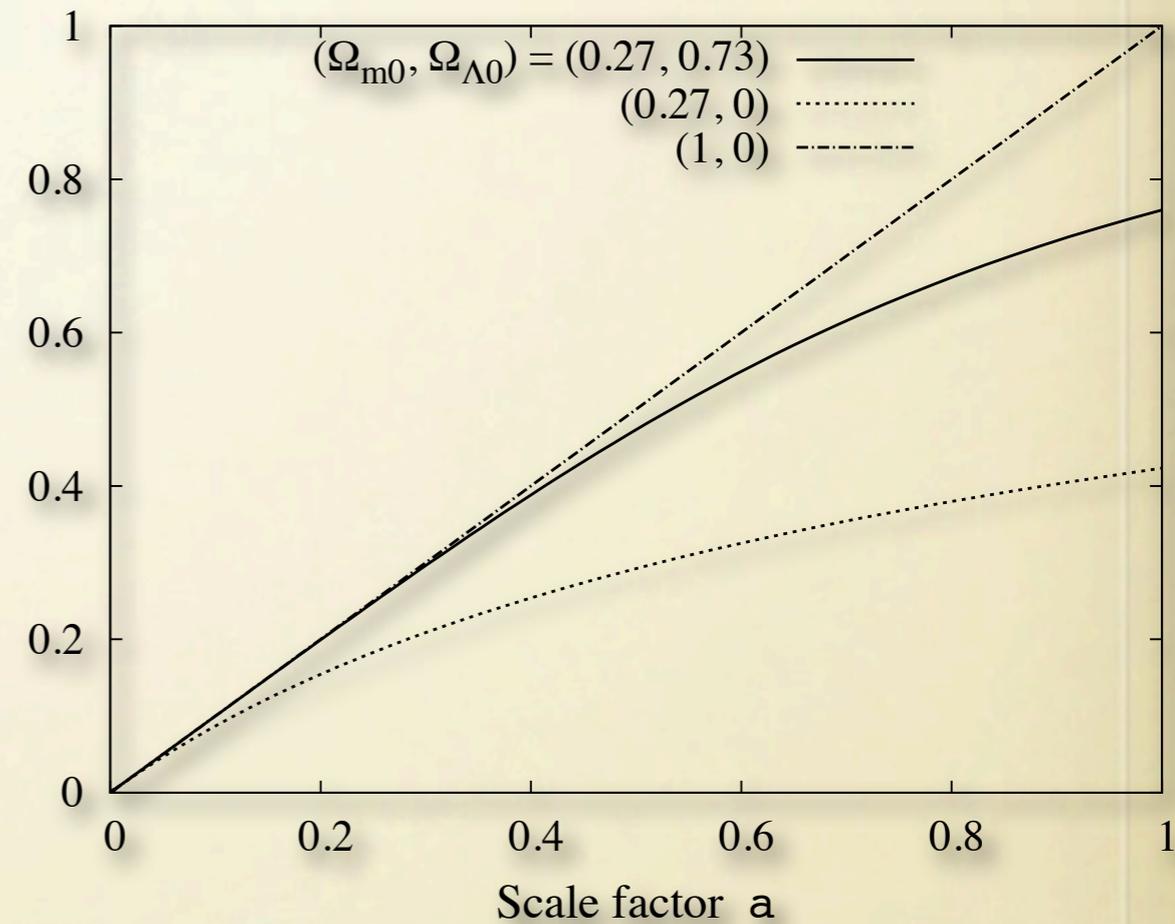
- 物質＋宇宙項の一般的なモデル  
に対する解析解

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda 0} + \frac{1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0}}{a^2}}$$

growing mode:  $D_+ \propto H \int_0^a \frac{da}{a^3 H^3}$

decaying mode:  $D_- \propto H$

Growth factor  $D_+$



(減衰モードは重要でない)

# 速度場

- 線形化したオイラー方程式より

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{v} + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{v} \propto a^{-1} \quad : \text{decaying}$$

- 減衰モードを無視すると

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla \psi}{aH}, \quad \psi : \text{velocity potential}$$

- 線形化した連続の式へ代入

$$\Delta \psi = a^2 H \dot{\delta} = a^2 H^2 f \delta, \quad f(t) \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a} = \frac{\dot{D}}{HD}$$

- ポアソン方程式と比較すると、線形速度ポテンシャルは重力ポテンシャルに比例する

$$\psi = \frac{H^2 f}{4\pi G \bar{\rho}} \Phi$$

# ダークマター宇宙における構造形成

- **ダークマターとは**
  - 宇宙の支配的な物質成分
  - 通常物質（バリオンやレプトンなど）とは異なる
  - 正体不明
  - 多数の天文学的／宇宙論的観測を説明するのに不可欠
  - 圧力は無視できる（無衝突）
- **宇宙の構造形成はダークマターの重力成長が支配的な原因になっている**

# ダークマターゆらぎの時間発展

## • 発展方程式

- 放射優勢→物質優勢：放射密度ゆらぎは十分小さく、近似的に重力源にならない

$$\ddot{\delta}_{\text{dm}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\text{dm}} = 4\pi G \left( \bar{\rho}_{\text{dm}}\delta_{\text{dm}} + \bar{\rho}_{\text{r}}\delta_{\text{r}} + \frac{3}{c^2}\delta p_{\text{r}} \right) \simeq 4\pi G\bar{\rho}_{\text{dm}}\delta_{\text{dm}}$$

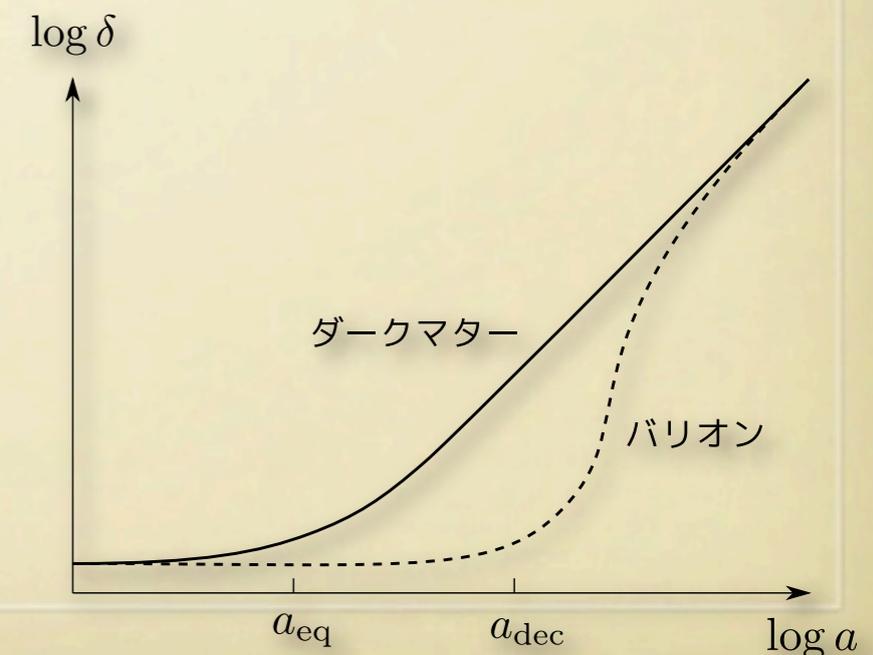
- 変数  $y = \bar{\rho}_{\text{dm}}/\bar{\rho}_{\text{r}} = a/a_{\text{eq}}$  およびフリードマン方程式により、

$$\frac{d^2\delta_{\text{dm}}}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\frac{d\delta_{\text{dm}}}{dy} - \frac{3\delta_{\text{dm}}}{2y(1+y)} = 0$$

## • 成長モードは

$$\delta_{\text{dm}} \propto 1 + \frac{3}{2}\frac{a}{a_{\text{eq}}}$$

⇒ ダークマターのゆらぎは物質と放射の等密度時以降にのみ成長できる



# 無衝突減衰

- ダークマター：（定義により）ほとんど無衝突
  - ダークマター粒子はほとんど他の粒子と衝突しない (free-streaming)
  - したがって、free-streamingスケールの密度ゆらぎを消し去ってしまう

- 時刻  $t$  でのFree-streaming スケール：

$$v dt = a dx \quad \Rightarrow \quad L_{\text{fs}}(t) = \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt' = \int_0^{a(t)} \frac{v da}{a^2 H}$$

$$v \sim \begin{cases} c & (a < a_{\text{nr}}) \\ ca_{\text{nr}}/a & (a > a_{\text{nr}}) \end{cases},$$

$$a_{\text{nr}} = \frac{3k_{\text{B}}T_0}{mc^2} \quad (:\text{scale factor when the particle becomes non-relativistic})$$

- これらの式より

$$L_{\text{fs}} \simeq 82.31 \left( \frac{mc^2}{10 \text{ eV}} \right)^{-1} \text{ Mpc}$$

# ダークマター粒子の分類

- **ホット・ダークマター**
  - 無衝突減衰が効率的：大きな速度分散
  - 典型的候補：比較的大きな質量を持つニュートリノ
  - 小スケールの構造ははじめに形成されない
    - **トップダウン・シナリオ**
- **コールド・ダークマター（現在の標準モデル）**
  - 無衝突減衰は無視できる：小さな速度分散
  - 典型的候補：WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles)
    - **WIMPs は現在の素粒子の標準模型には含まれていない**
  - 小スケールの構造がはじめに形成される
    - **ボトムアップ・シナリオ**

# バリオンゆらぎの時間発展

- バリオン密度ゆらぎの“Catch up”

- バリオン成分ゆらぎの発展方程式

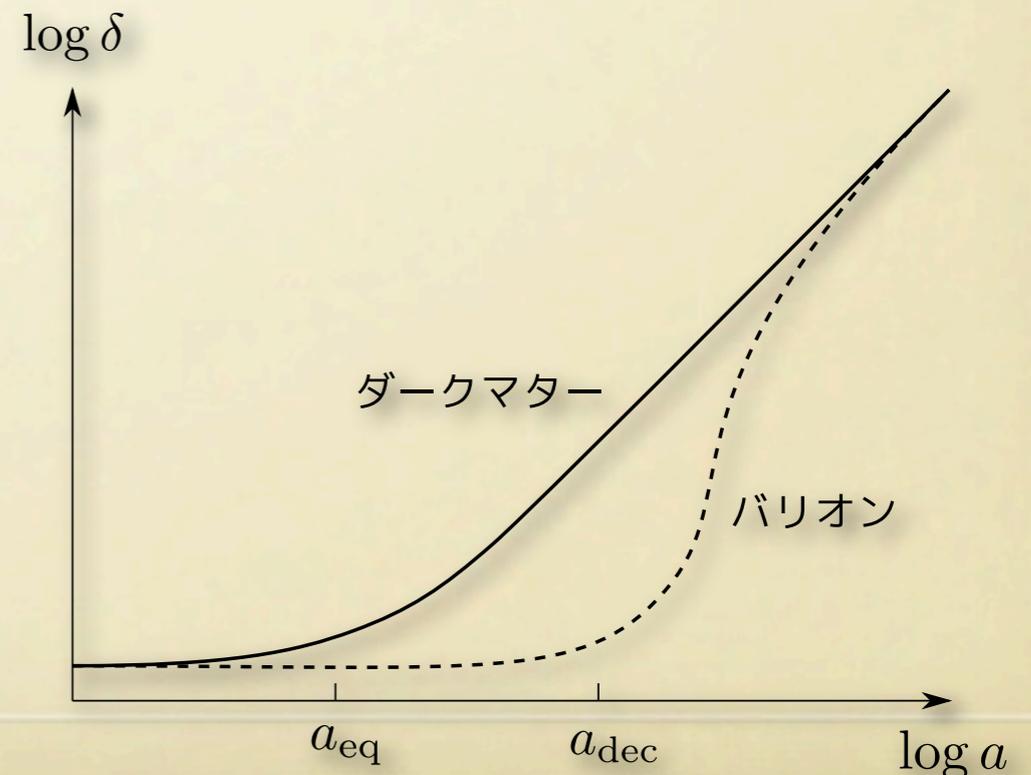
$$\ddot{\delta}_b + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_b = 4\pi G(\bar{\rho}_{\text{dm}}\delta_{\text{dm}} + \bar{\rho}_b\delta_b) \simeq 4\pi G\bar{\rho}_{\text{dm}}\delta_{\text{dm}}$$

- 変数変換  $y = a/a_{\text{dec}}$  により

$$y^{1/2} \frac{d}{dy} \left( y^{3/2} \frac{d\delta_b}{dy} \right) = \frac{3}{2} \delta_{\text{dm}}$$

- 初期条件  $\delta_b(y=1) = \delta'_b(y=1) = 0$  を課して解く：

$$\delta_b = \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{a_{\text{dec}}} \right)^{-1} + 2 \left( \frac{a}{a_{\text{dec}}} \right)^{-3/2} \right] \delta_{\text{dm}}$$



# ジーンズ長以下：音響振動

- ジーンズ長より小さなスケールでは、圧力が重力に抗することができるため、音波モードが現れる

- 線形発展方程式：

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\delta = 0$$

- WKB解：

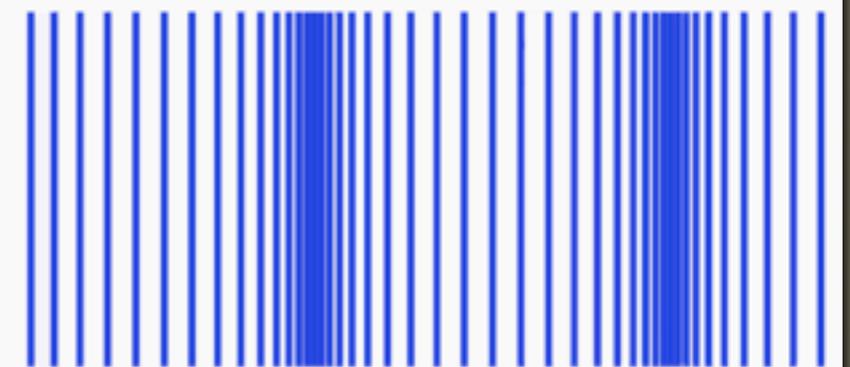
$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} \exp\left(ik \int_0^t c_s \frac{dt}{a}\right)$$

- 宇宙膨張により振幅が徐々に減衰
- 振動スケール：

$$r_s(t) \equiv \int_0^t c_s \frac{dt}{a}$$

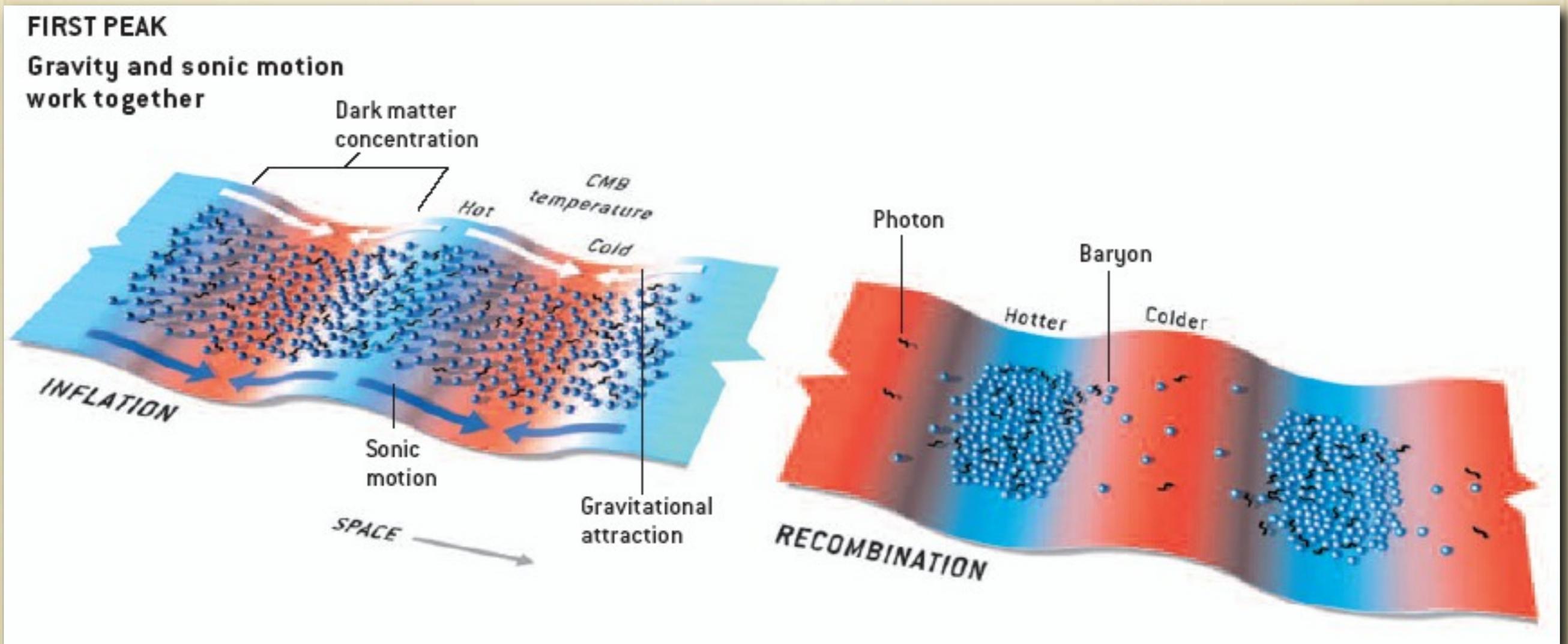
- 時刻  $t$  までに音波が進むことのできる距離スケール

縦波のモデル



# バリオン・光子流体の音響振動

- バリオン・光子混合流体は、脱結合時までダークマター・ポテンシャル中で音響振動
- 脱結合後は振動位相が固定



Hu & White: Scientific American

# バリオン・光子流体の音響振動

- バリオン・光子混合流体

- フリードマン方程式と、以下の式

$$R \equiv \frac{3 \bar{\rho}_b}{4 \bar{\rho}_r} \Rightarrow c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+R}}$$

$$k_{\text{eq}} \equiv \frac{a_{\text{eq}} H_{\text{eq}}}{c}$$

- により、音響振動スケールは解析的に積分できる：

$$r_s(t) = \frac{2 \sqrt{2/3}}{k_{\text{eq}} \sqrt{R_{\text{eq}}}} \ln \left( \frac{\sqrt{1+R} + \sqrt{R+R_{\text{eq}}}}{1 + \sqrt{R_{\text{eq}}}} \right)$$

- この振動スケールはCMBや大規模構造により観測的に確認されている

# 第二部まとめ

- ホライズンスケール以下の原始ゆらぎは、ジーンズ不安定性により物質優勢期に成長することができる
- バリオン密度ゆらぎは脱結合時以降にのみ成長することができる
  - 脱結合時以前：光子との強い結合
- 一方、ダークマターの密度ゆらぎは物質と放射の等密度時以降成長することができる
  - バリオンのみの宇宙ではゆらぎが十分成長して構造形成をする時間が足りない（等密度時 < 脱結合時）

## 第三部

# 宇宙の非一様性 II

# ゆらぎの相対論的効果および非線形効果

- **一般相対論効果**

- ここまでのニュートンの取り扱いホライズンスケール以下で有効
- 超ホライズンスケールのゆらぎは相対論的に扱う必要

- **非線形効果**

- ここまでの線形近似はゆらぎが十分小さいときに有効
- 非線形構造形成は一般にとっても複雑な過程
  - 一般的な非線形過程に関する完全な解析的理論はなく、単純化したモデルや近似理論が用いられる

# 相対論的ゆらぎの理論

- 時空のゆらぎ

- 計量のゆらぎ

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + a^2 \left( 1 + \frac{2\Psi}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j$$

(Conformal Newtonian gauge, scalar perturbations, flat model  $K = 0$ )

- アインシュタインテンソルのゆらぎ (線形近似)

$$G^0_0 = -\frac{1}{c^2} \left[ 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \left( 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) + \frac{6}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Psi} - \frac{2}{a^2} \Delta \Psi \right],$$

$$G^0_i = -\frac{2}{c^3} \left( \frac{\dot{a}}{a} \Phi - \dot{\Psi} \right)_{,i}, \quad G^i_0 = \frac{2}{c^3 a^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \Phi - \dot{\Psi} \right)_{,i}$$

$$G^i_j = -\frac{1}{c^2} \left[ \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) + \frac{2}{c^2} \left( \ddot{\Psi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Psi} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} \right) - \frac{1}{a^2} \Delta (\Phi + \Psi) \right] \delta_{ij} - \frac{1}{c^2 a^2} (\Phi + \Psi)_{,ij}$$

# 相対論的ゆらぎの理論

- エネルギー・運動量テンソルのゆらぎ

- 完全流体の場合 (簡単のため)

$$T^{\mu}_{\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta^{\mu}_{\nu} \quad (\rho = \rho c^2 : \text{energy density})$$

- 線形近似

$$\begin{array}{l} u^0 = 1 - \frac{\Phi}{c^2}, \quad u^i = \frac{v_i}{ca} \\ u_0 = -1 - \frac{\Phi}{c^2}, \quad u_i = \frac{av_i}{c} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} T^0_0 = -\bar{\rho}(1 + \delta), \quad T^0_i = (\bar{\rho} + \bar{p})\frac{av_i}{c}, \\ T^i_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})\frac{v_i}{ca}, \quad T^i_j = (\bar{p} + \delta p)\delta_{ij} \end{array}$$

- アインシュタイン・テンソル

$$G^{\mu}_{\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu}_{\nu}$$

- ゆらぎの0次項：フリードマン方程式 & エントロピー保存
- 1次項：相対論的ゆらぎの発展方程式

# 相対論的ゆらぎの理論

- 線形ゆらぎのアインシュタイン方程式

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Psi} - \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) - \frac{c^2}{a^2}\Delta\Psi = 4\pi G\bar{\rho}\delta$$

$$\left(\dot{\Psi} - \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right)_{,i} = \frac{4\pi G}{c^2}(\bar{\rho} + \bar{p})av_i$$

$$\left[\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\Phi - \ddot{\Psi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \frac{c^2}{2a^2}\Delta(\Phi + \Psi)\right]\delta_{ij} - \frac{c^2}{2a^2}(\Phi + \Psi)_{,ij} = 4\pi G\delta p\delta_{ij}$$

- 第2式：（スカラーゆらぎに対して）速度場は回転なし

$$v_i \equiv -\frac{\partial_i\psi}{aH} \quad (\psi : \text{scalar velocity potential})$$

- 第3式⇒トレース部と非トレース部に分解：

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\Phi - \ddot{\Psi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \frac{c^2}{3a^2}\Delta(\Phi + \Psi) = 4\pi G\delta p$$

$$(\Phi + \Psi)_{,ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta(\Phi + \Psi) \quad \Rightarrow \quad \Phi + \Psi = 0$$

# 相対論的ゆらぎの理論

- 完全流体に対する方程式系は次の形へ簡単化：

$$\frac{c^2}{a^2} \Delta \Phi - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a} \Phi \right) = 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

$$\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a} \Phi = \frac{4\pi G a}{c^2 \dot{a}} (\bar{\rho} + \bar{p}) \psi$$

$$\ddot{\Phi} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \Phi = 4\pi G \delta p$$

- 第1式と第2式より「ポアソン方程式」：

$$\Delta \Phi = \frac{4\pi G a^2}{c^2} \bar{\rho} \left[ \delta + \frac{3}{c^2} (1 + w) \psi \right]$$

- 「ゲージ不変密度ゆらぎ」：

$$\Delta \equiv \delta + \frac{3}{c^2} (1 + w) \psi$$

- 「バーディーン変数」「共動ゲージの密度ゆらぎ」としても知られる量

# 相対論的ゆらぎの理論

- 断熱ゆらぎの場合

$$\delta p = \frac{c_s^2 \bar{\rho} \delta}{c^2} \Rightarrow \ddot{\Phi} + \left(4 + \frac{3c_s^2}{c^2}\right) H \dot{\Phi} - \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \Phi + 3H^2 \left(\frac{c_s^2}{c^2} - w\right) \Phi = 0$$

- この方程式の解が得られると、他のゆらぎ変数は次式から求まる

$$\Delta = \frac{2}{3} \frac{\Delta \Phi}{a^2 H^2}, \quad \psi = \frac{2}{3} \frac{\dot{\Phi} + H\Phi}{H(1+w)}$$

- 次の「曲率ゆらぎ」も便利なおことがある：

$$\zeta \equiv \Psi - \psi = \Psi + \frac{2}{3} \frac{\dot{\Psi} - H\Phi}{H(1+w)}$$

- 断熱ゆらぎの場合、超ホライズンスケールにおいて保存量になる

$$\dot{\zeta} = \frac{2Hc_s^2}{3c^2(1+w)} \left(\frac{ck}{aH}\right)^2 \Phi \quad (\text{perfect fluid \& adiabatic pert.})$$

# 相対論的ゆらぎの時間発展

- 簡単な例：単成分かつ  $w = \text{const.}$

$$\begin{cases} \text{RD: } w = \frac{1}{3} \\ \text{MD: } w = 0 \end{cases} \quad \nu \equiv \frac{2}{1+3w} \quad \Rightarrow \quad a(t) = At^{\nu/(1+\nu)}, \quad c_s^2 = wc^2$$

- フーリエ空間における発展方程式はベッセル微分方程式に帰着：

$$x \equiv \frac{(1+\nu)k}{A} t^{1/(1+\nu)}, \quad F \equiv x^\nu \Phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dF}{dx} + \left[ c_s^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} \right] F = 0$$

- 解：

$$F = \begin{cases} C_1 j_\nu(c_s x) + C_2 n_\nu(c_s x), & (c_s \neq 0) \\ C_1 x^2 + C_2 x^{-3}, & (c_s = 0) \end{cases}$$

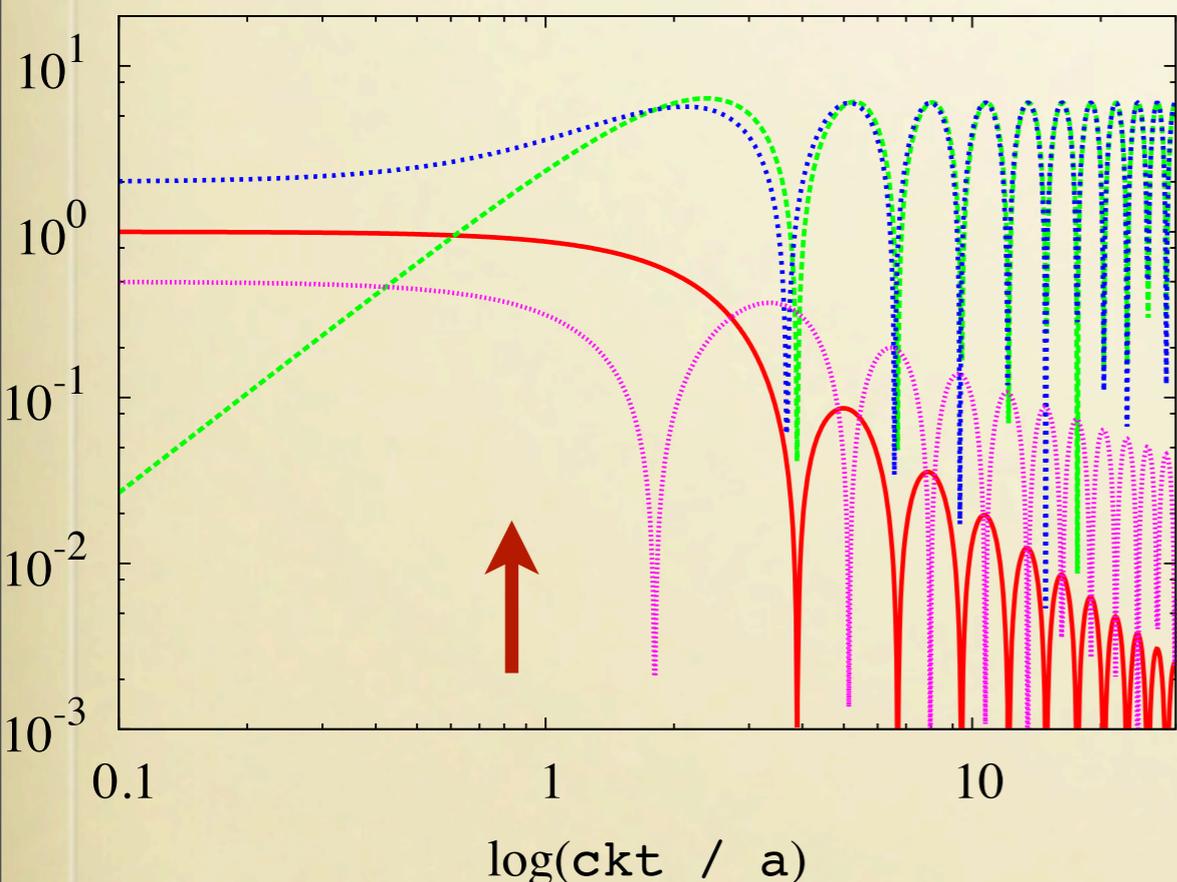
- 第2項は減衰項 ( $c_s \geq 0$ )

# 相対論的ゆらぎの時間発展

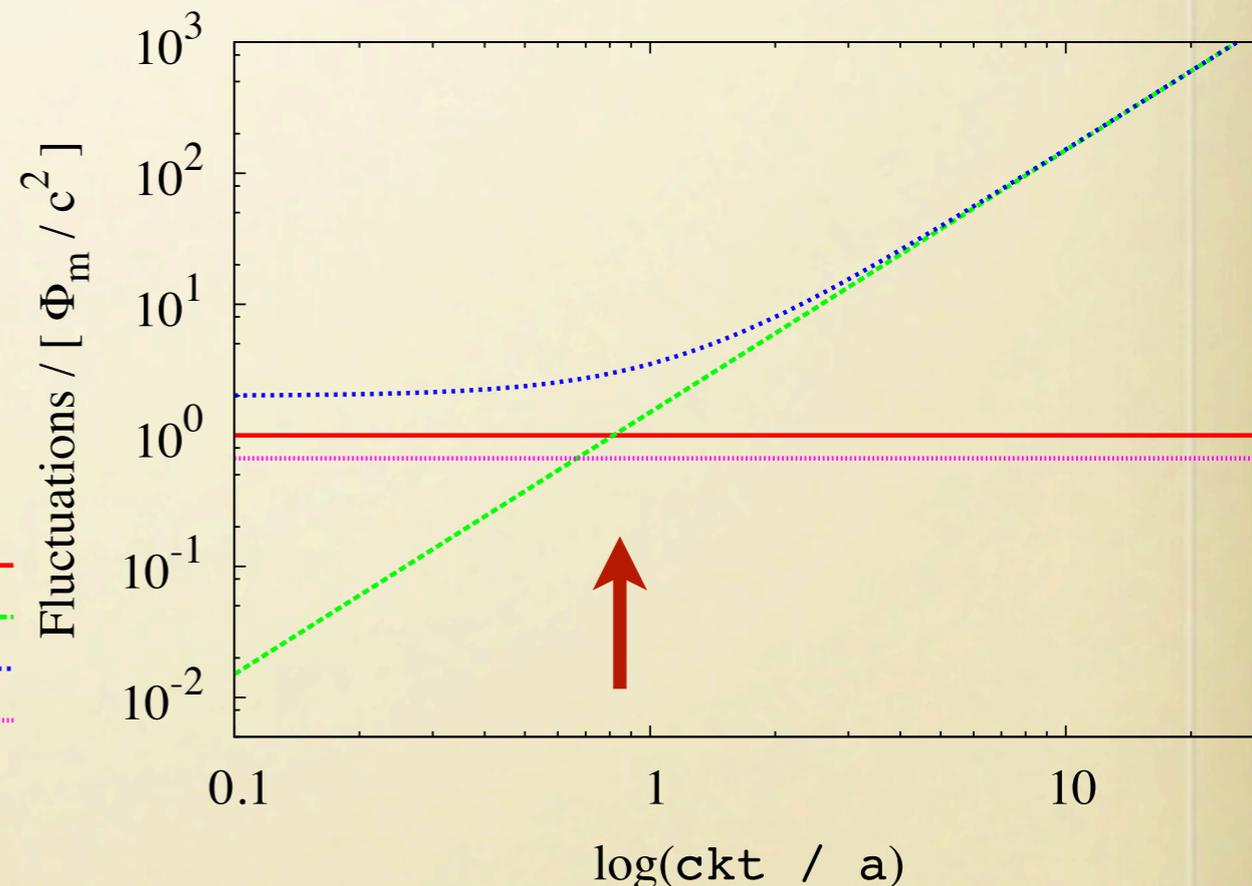
- 非減衰解：

$$\Phi \propto \begin{cases} x^{-\nu} j_{\nu}(c_s x) & (\nu > -1) \\ 1 & (\nu = 2) \end{cases}$$

放射優勢期にホライズンに入るゆらぎ



物質優勢期にホライズンに入るゆらぎ

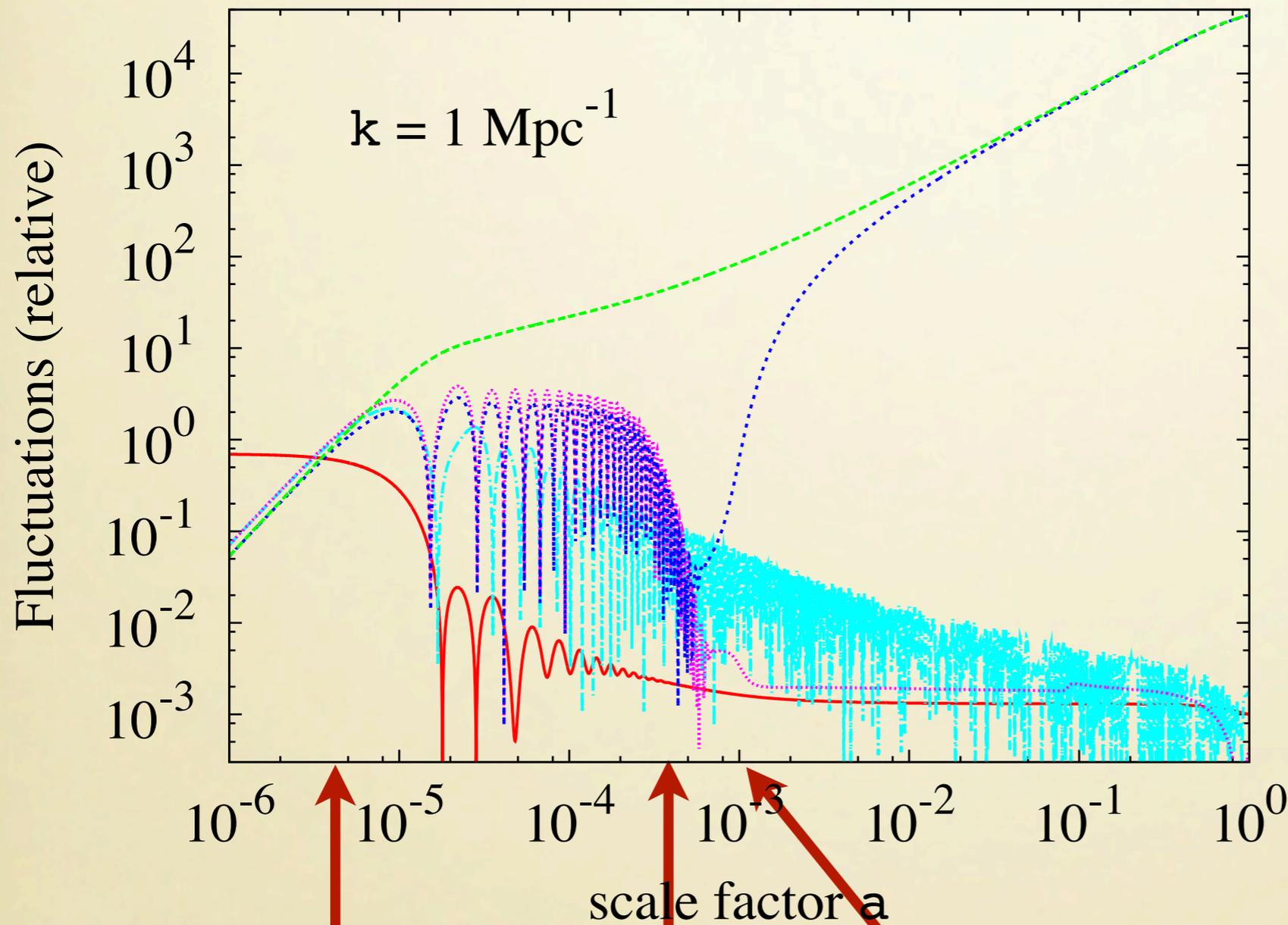


ホライズン内外で成長が大きく異なる

# 相対論的ゆらぎの時間発展

- 現実的な多成分宇宙の結果：

- 衝突項を持つボルツマン方程式を数値的に積分する



放射優勢期に  
ホライズンに  
入るゆらぎ

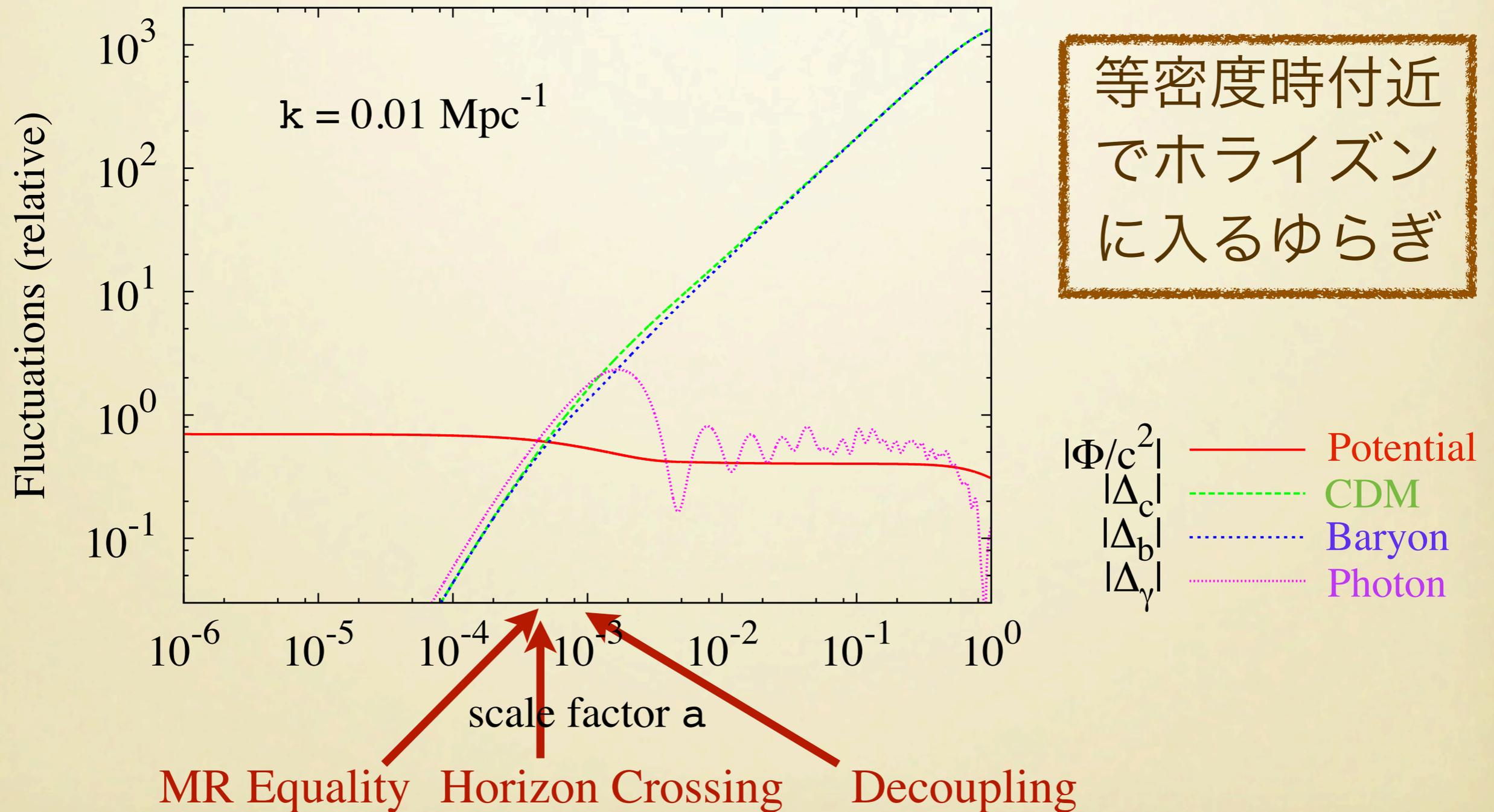
$ \Phi/c^2 $	—	Potential
$ \Delta_\nu $	- - -	Neutrino
$ \Delta_\gamma $	⋯	Photon
$ \Delta_b $	- · - · -	Baryon
$ \Delta_c $	- - - - -	CDM

Horizon Crossing      MR Equality      Decoupling

[used CAMB code, ~synchronous gauge]

# 相対論的ゆらぎの時間発展

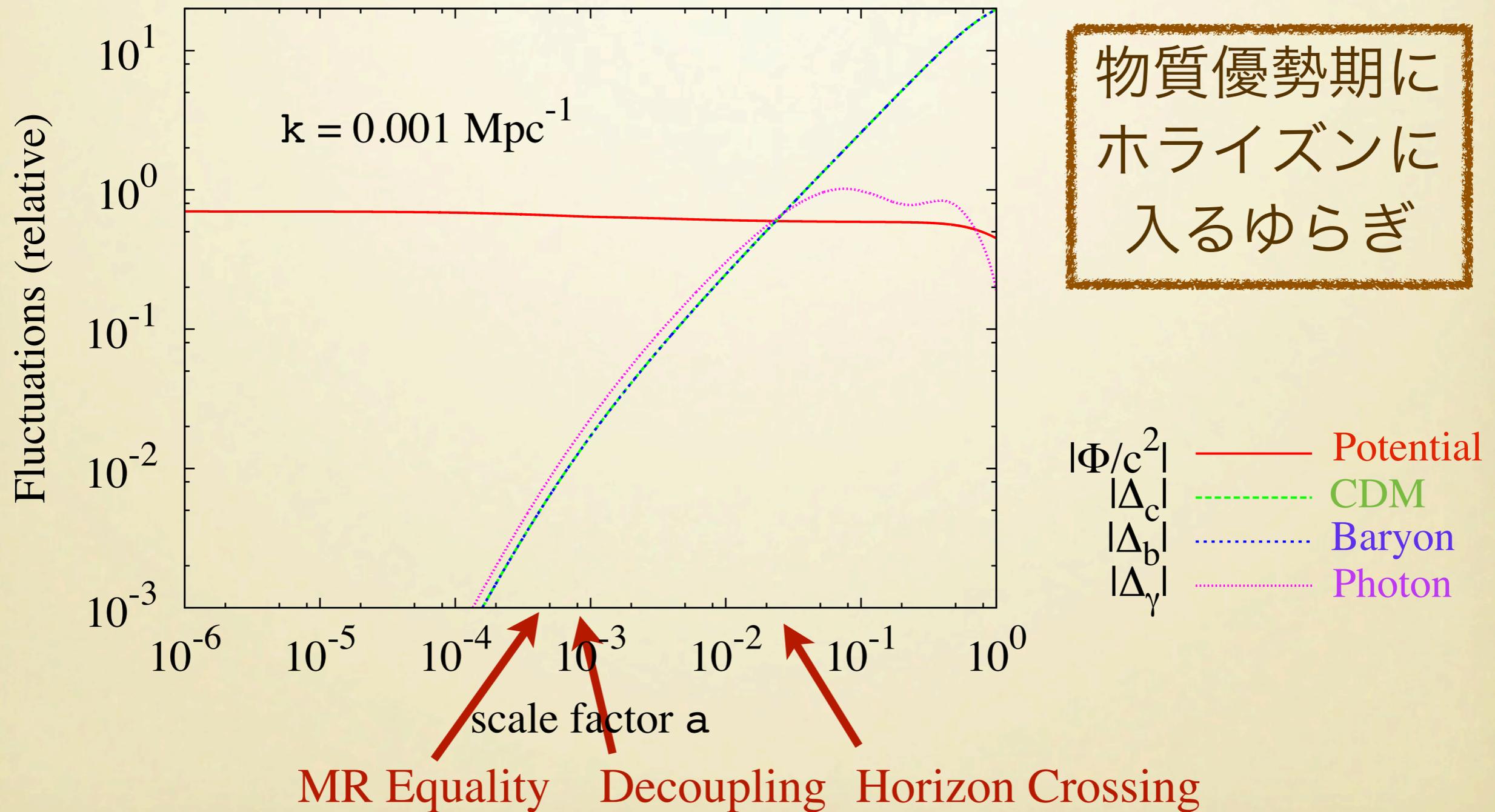
- 現実的な多成分宇宙の結果：



[used CAMB code, ~synchronous gauge]

# 相対論的ゆらぎの時間発展

- 現実的な多成分宇宙の結果：



[used CAMB code, ~synchronous gauge]

# 非線形構造形成

- いろいろな目的に応じて、非線形領域を調べる多数の方法
  - 球対称崩壊モデル
  - ゼルドビッチ近似
  - 数値シミュレーション (N体、SPH、、、、)
  - プレス・シェヒター理論
  - 非線形摂動論
  - ...

# 球対称崩壊モデル

- 球対称殻に対するニュートン方程式：

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}, \quad \left( \begin{array}{l} R : \text{radius of the spherical shell} \\ M : \text{total mass inside the shell} \end{array} \right)$$

- 第一積分：

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{2GM}{R} + 2E, \quad (E : \text{integration constant, energy})$$

- 束縛解 ( $E < 0$ )

$$\begin{cases} R = (GM)^{1/3} A^2 (1 - \cos \theta) \\ t = A^3 (\theta - \sin \theta) \end{cases} \quad (E < 0)$$

# 球対称崩壊モデル

- 簡単のためアインシュタイン・ドジッター宇宙を考えると

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1$$

- 転回点 (Turn around) : 球殻の膨張が止まるとき

$$\theta_{\text{turn}} = \pi, \quad t_{\text{turn}} = \pi A^3, \quad R_{\text{turn}} = 2(GM)^{1/3} A^2, \quad \delta_{\text{turn}} = \frac{9\pi^2}{6} - 1 \simeq 4.55$$

- 崩壊点 (Collapse) : 球殻の半径がゼロになるとき

$$\theta_{\text{coll}} = 2\pi, \quad t_{\text{coll}} = 2\pi A^3, \quad R_{\text{coll}} = 0, \quad \delta_{\text{coll}} = \infty$$

- 自由落下時間スケール :

$$t_{\text{ff}} = t_{\text{coll}} - t_{\text{turn}} = \pi A^3 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_{\text{turn}}^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_{\text{turn}}}}$$

# 球対称崩壊モデル

- 線形理論との対応

- ゆらぎが小さい場合の展開より

$$\delta = \frac{3}{20}\theta^2 + O(\theta^4), \quad t = \frac{A^3}{6}\theta^3 + O(\theta^5) \quad \Rightarrow \quad \delta_L(t) \equiv \frac{3}{20} \frac{(6t)^{2/3}}{A^2}$$

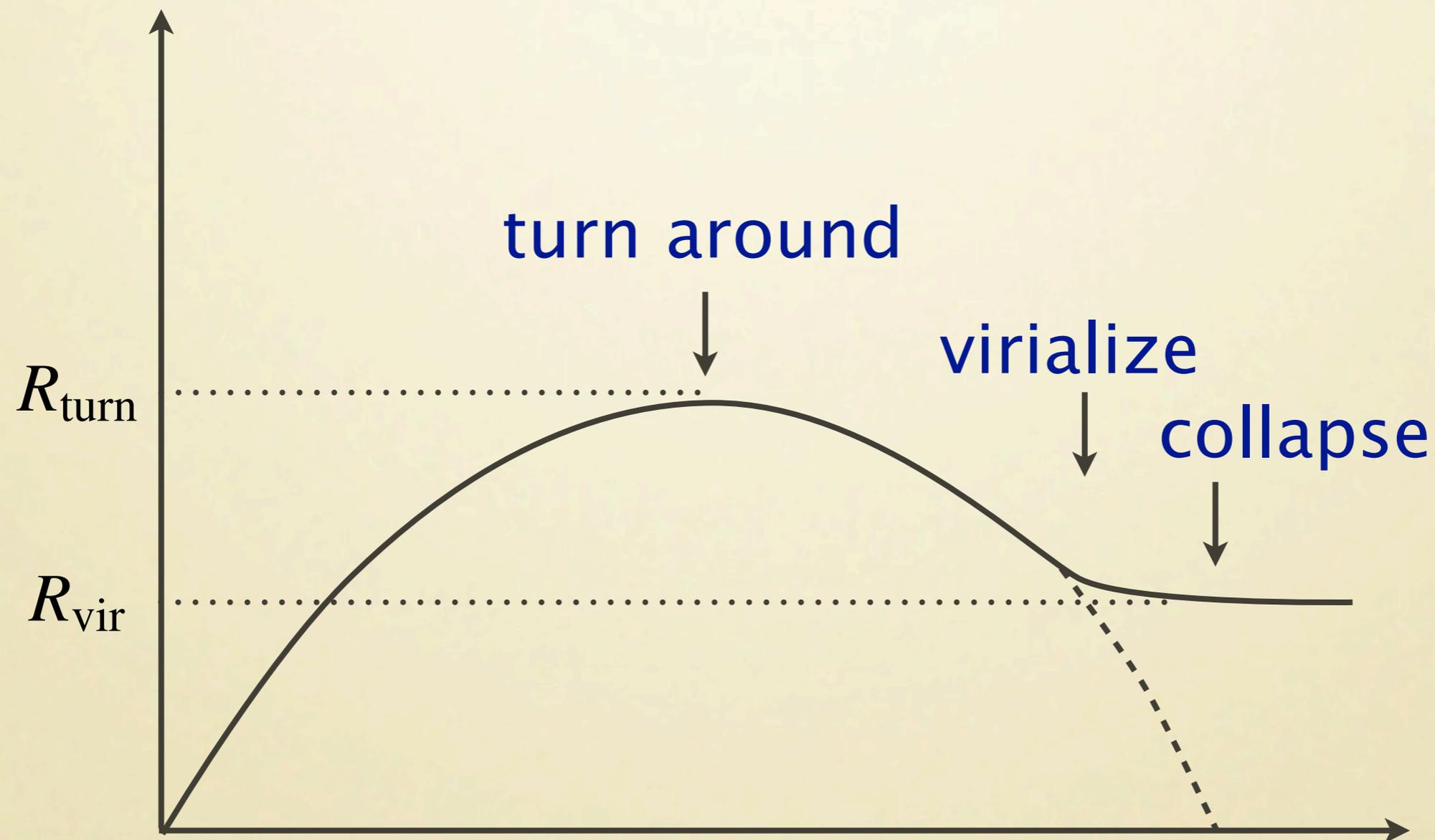
- 転回点と崩壊点の時刻に外挿した線形ゆらぎの値

$$\delta_L(t_{\text{turn}}) = \frac{3(6\pi)^{2/3}}{20} \simeq 1.06, \quad \delta_L(t_{\text{coll}}) = \frac{3(12\pi)^{2/3}}{20} \simeq 1.69$$

- 線形理論の外挿により非線形構造形成を推定するのに使われる
- 上の数値はアインシュタイン・ドジッター宇宙以外の宇宙モデルにおいても近似的に正しい

# 球対称モデルとビリアル化

- 実際のゆらぎは密度が高くなると速度分散によって形が支えられるようになる (ビリアル化)



# 球対称モデルとビリアル化

- ビリアル定理：定常的な自己重力系で次の関係がある

$$E = \frac{1}{2}U, \quad (E : \text{total energy}, U : \text{potential energy})$$

- 一様球の場合

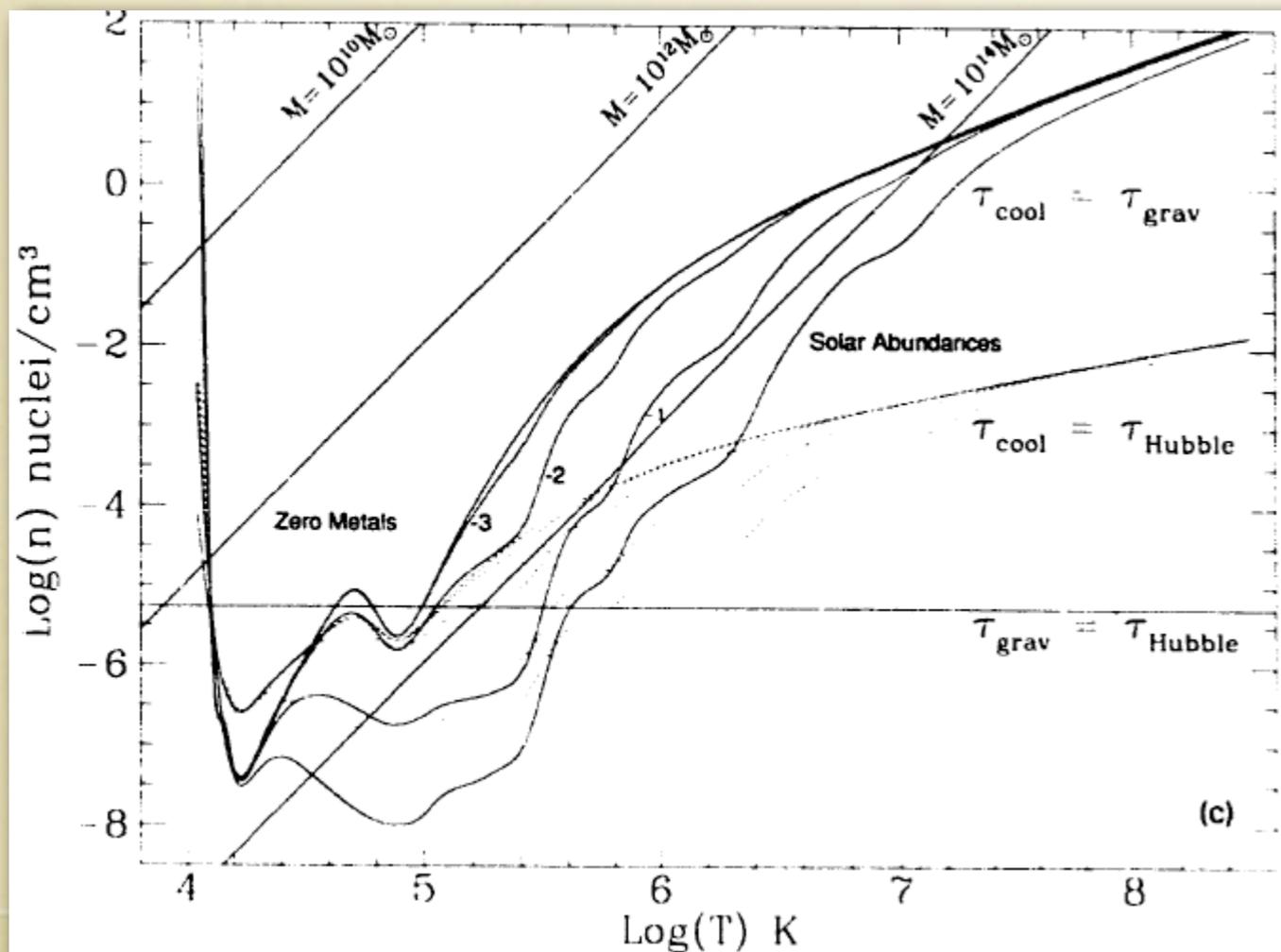
$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{\text{vir}}}, \quad E = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{\text{turn}}} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{vir}} = \frac{1}{2}R_{\text{turn}}$$

- ビリアル化した天体が形成されたときの密度ゆらぎの値：

$$\delta_{\text{coll}} = \frac{3M}{4\pi R_{\text{vir}}^3 \bar{\rho}_{\text{coll}}} - 1 = 18\pi^2 - 1 \simeq 177$$

# 放射冷却と銀河形成

- 熱的な速度分散により、ビリアル化した天体はそれ以上崩壊できない
  - 銀河が形成するためには、放射冷却が本質的
  - バリオン成分がお互いに衝突するとき放射してエネルギーを持ち去る
  - 冷却図：放射冷却が可能な条件を示す図



$$M \sim < 3.1 \times 10^1 \alpha^5 \left( \frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^2 \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^{1/2} m_p$$

$$\simeq 7 \times 10^{11} M_{\odot}$$

比較的単純な考察から銀河の  
典型的質量がわかる

銀河の典型質量は物理基本定  
数と関係

# プレス・シェヒター理論

- プレス・シェヒター理論 (PS理論) とは :

- 線形理論の外挿により、形成された天体の数密度を導くモデル
- ゆらぎの平均化 : 質量スケールごとに平均化する半径  $R$  を決める

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho}_0 R^3, \quad \delta_M(\mathbf{q}, t) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|\mathbf{q}' - \mathbf{q}| \leq R} d^3 q' \delta_L(\mathbf{q}', t)$$

$\mathbf{q}$  : initial position of the mass element (Lagrangian coordinates)

- 質量スケール  $M$  で平均化されたゆらぎの分布関数 : ガウス分布  
(初期ガウスゆらぎの場合)

$$P(\delta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma^2(M)}\right), \quad \sigma^2(M) = \langle \delta_M^2 \rangle$$

# プレス・シエヒター理論

- 基本的仮定：

- 質量スケール  $M$  で平均化されたある点のゆらぎの値が臨界密度を超えていれば、その点の質量素片は質量  $M$  以上の天体の一部として取り込まれている
- 質量素片が質量  $M$  以上の天体に取り込まれている確率：

$$P_{>\delta_c}(M) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta_M) d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c/\sigma(M)}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

( $\delta_c \simeq 1.69$  : critical density contrast)

# プレス・シェヒター理論

- 質量範囲  $[M, M+dM]$  にある天体の質量密度：

$$n(M)M dM = 2\bar{\rho}_0 \left| P_{>\delta_c}(M) - P_{>\delta_c}(M + dM) \right| = 2\bar{\rho}_0 \left| \frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} \right| \left| \frac{d\sigma(M)}{dM} \right| dM$$

形成した天体の微分数密度

最終的に宇宙にあるすべての質量  
を天体の形成に寄与させるため、  
手で2倍の因子を付け加える

- プレス・シェヒター質量関数：

$$n(M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}_0}{M^2} \left| \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \right| \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)}\right)$$

Press & Schechter (1974)

# 拡張プレス・シェヒター理論

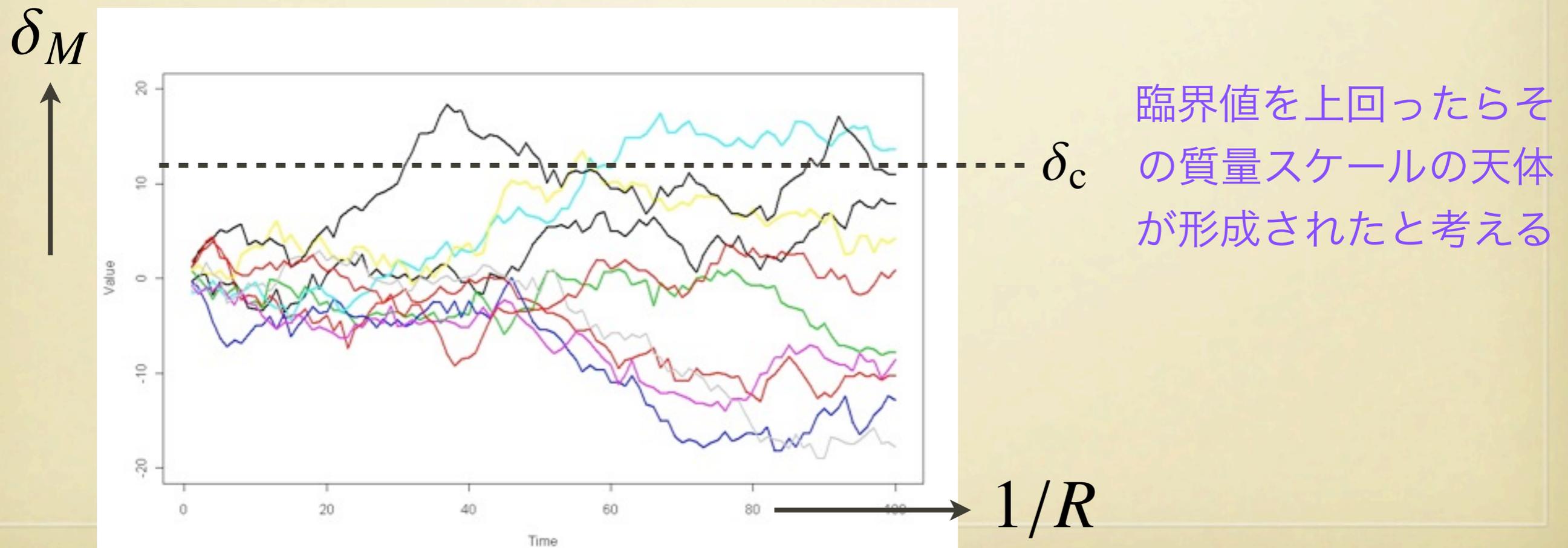
- Sharp-k フィルタ

Bond et al. (1991)

- 実空間Top-hatの代わりにフーリエ空間のTop-hatで置き換えてみる

$$\delta_M = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} W_{\text{TH}}(kR) \delta_L(\mathbf{k}) \rightarrow \int_{|\mathbf{k}| \leq 1/R} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta_L(\mathbf{k})$$

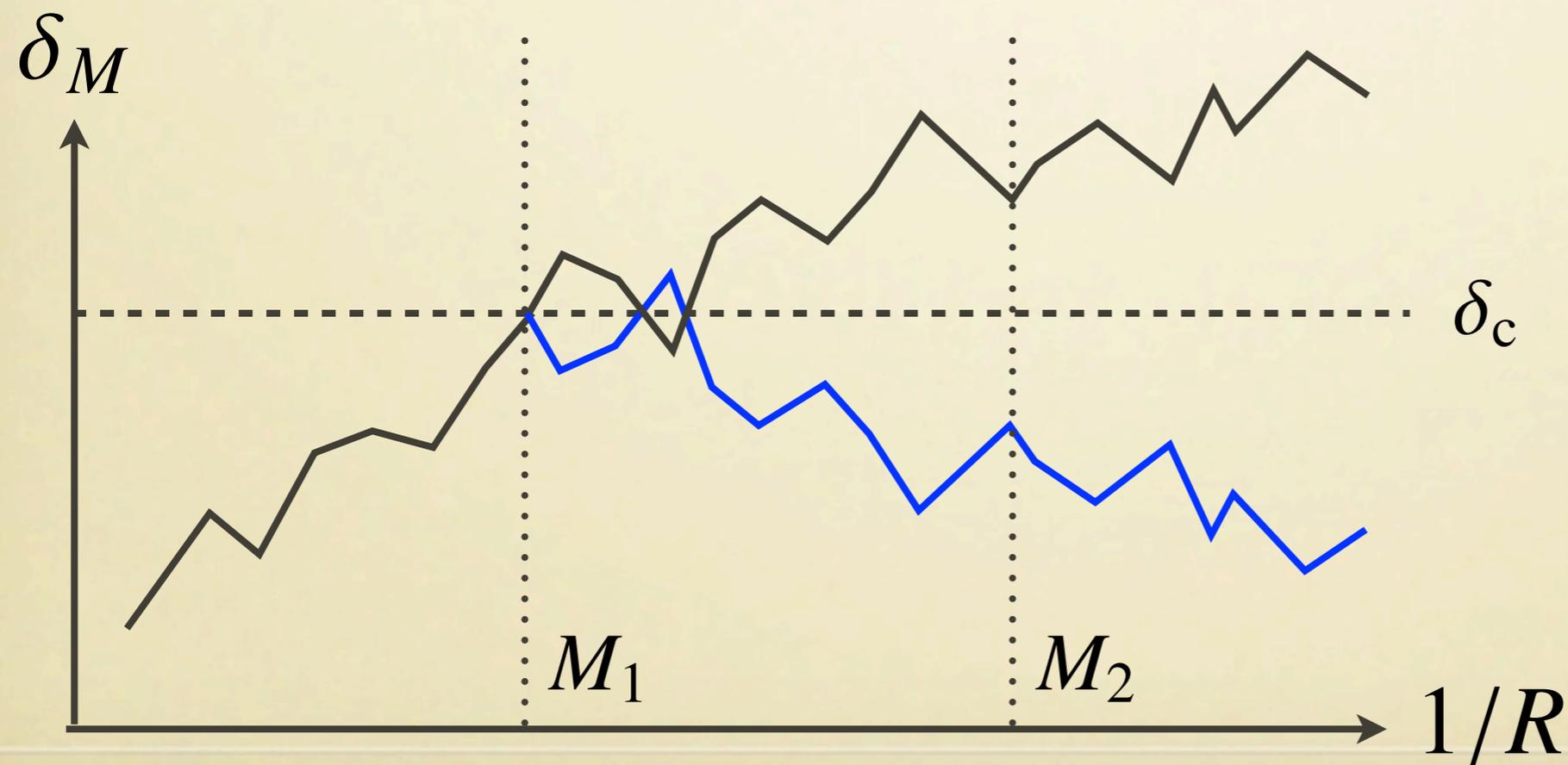
- 各フーリエモードは独立なランダム変数  $\Rightarrow R (M)$ を小さくするにつれて値がランダム・ウォークする



# 拡張プレス・シェヒター理論

- 因子2の問題について

- もともとのプレス・シェヒター理論では、ある質量スケールで天体形成しているゆらぎは、それより小さな質量スケールでも天体形成している
- 拡張理論にそのような制限はない
- プレス・シェヒター理論で後付けされた因子2は自然に説明できる（とはいえsharp-kの自然性は疑問）



臨界値を初めて上回る点について対称な経路が同じ確率で必ず存在



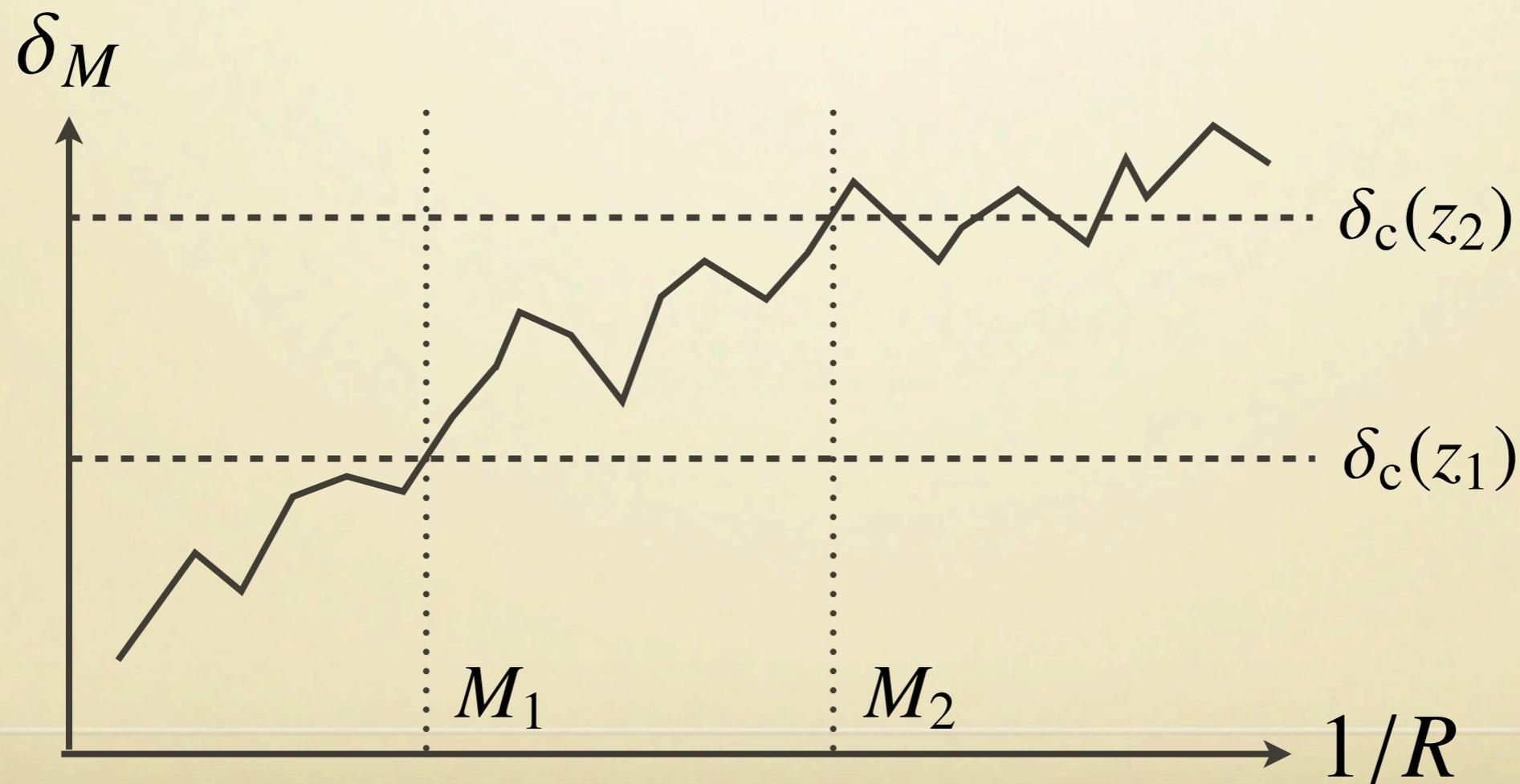
もとのPS理論にはカウントされていない寄与

# 拡張プレス・シェヒター理論

- 条件付き質量関数

- ある質量素片が赤方偏移 $z_1$ で質量 $M_1$ の天体の一部をなしているとき、それが昔 $z_2 (>z_1)$ で小さな質量 $M_2 (<M_1)$ の天体の一部であった確率 → 条件付き質量関数は原点の平行移動に対応 Bower (1991)

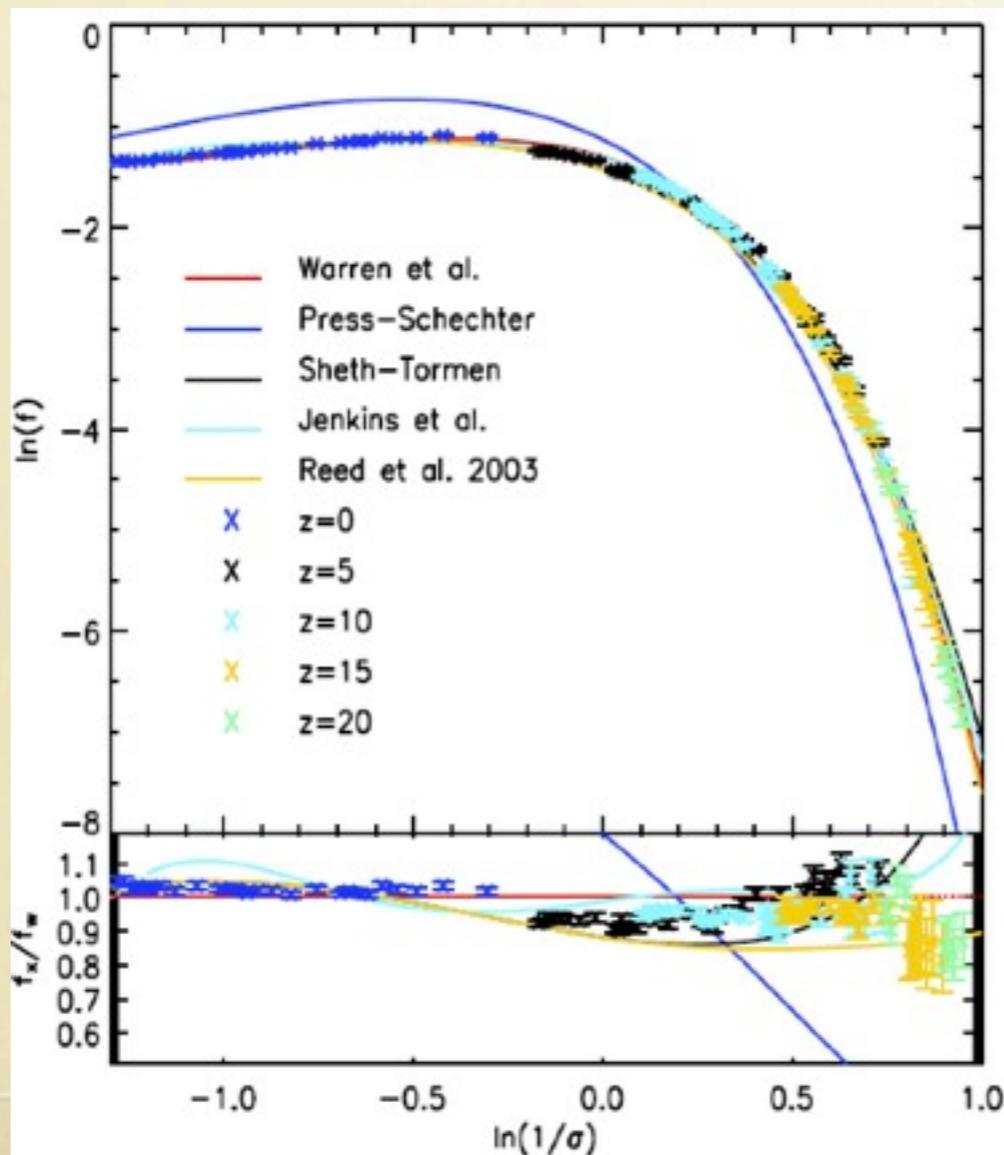
$$n(M_2, z_2 | M_1, z_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M_2} \left| \frac{d\sigma(M_2)}{dM_2} \right| \frac{\delta_c(z_2) - \delta_c(z_1)}{[\sigma^2(M_2) - \sigma^2(M_1)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{[\delta_c(z_2) - \delta_c(z_1)]^2}{2[\sigma^2(M_2) - \sigma^2(M_1)]}\right)$$



# 普遍質量関数 (universal mass function)

- 数値シミュレーションとの比較

- プレス・シェヒター質量関数はシミュレーションと少しずれている
- 質量関数を数値シミュレーションに合うように修正すると、時間進化のスケーリングを比較的正確に再現できる：普遍質量関数



$$v = \frac{\delta_c(z)}{\sigma(M)}$$

$$n(M, z) = \frac{\rho}{M^2} f(v) \frac{d \ln v}{d \ln M}$$

$$f_{\text{PS}}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v e^{-v^2/2},$$

$$f_{\text{ST}}(v) = 0.3222 \sqrt{\frac{2q}{\pi}} v e^{-qv^2/2} \left[ 1 + \frac{1}{(qv^2)^p} \right],$$

( $p = 0.3, q = 0.75$ )

Sheth & Tormen (2002)

# ハローバイアス

Mo & White (1996)

- Peak-background split

- ある領域を大スケール(質量スケール $M_0$ )で平均したゆらぎの値が  $\delta_0$  になる条件下で、質量 $M$ のハローの数密度 [拡張プレス・シェヒター理論による]

$$n(M, z|\delta_0) = \frac{\bar{\rho}}{M^2} f(\nu_{10}) \frac{d \ln \nu_{10}}{d \ln M}, \quad \left( \nu_{10} = \frac{\delta_c(z) - \delta_0}{[\sigma^2(M) - \sigma^2(M_0)]^{1/2}} \right)$$

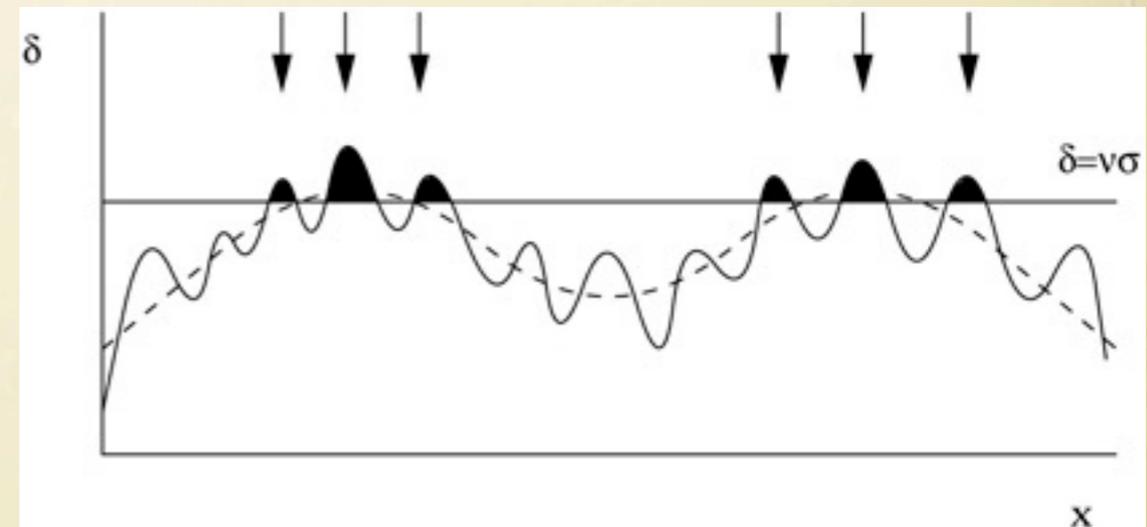
- 数密度ゆらぎ (ラグランジュ空間)

$$\delta_h^L = \frac{n(M, z|\delta_0)}{n(M)} - 1$$

- バイアス因子 (線形近似)

$$b_h^L = \frac{\delta_h^L}{\delta_0} = \begin{cases} \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c} & \text{(PS)} \\ \frac{1}{\delta_c} \left[ q\nu^2 - 1 + \frac{2p}{1+(q\nu^2)^p} \right] & \text{(ST)} \end{cases}$$

$$b_h^E = 1 + b_h^L$$



# 第三部のまとめ

- ゆらぎの相対論的効果は超ホライズンスケールにおいて重要
  - 密度ゆらぎの時間発展は超ホライズンスケールにおいて相対論的に扱う必要
  - 各フーリエモードについて、ゆらぎの波長がホライズンに入る時期は重要な役割を果たす
- 小スケールにおいて、あるいは構造の形成においては非線形効果が重要
  - 非線形構造形成は複雑、完全な理論はない
  - 多数の近似法やモデルが用いられている

## 第四部

# 非一様宇宙の観測量

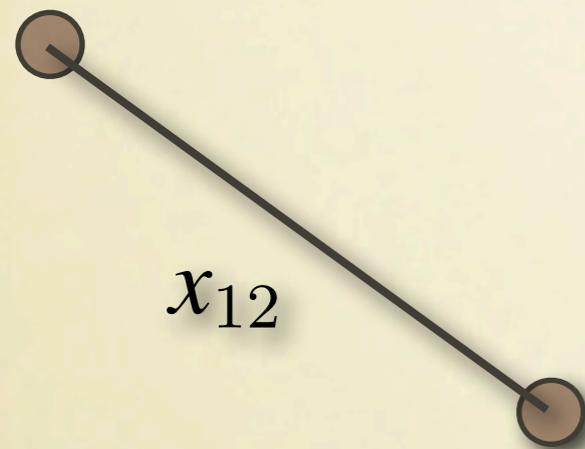
# 統計の重要性

- 宇宙論モデルにおいて初期条件は統計的にのみ与えられる
  - 例：インフレーションモデルにおける、量子的な初期密度ゆらぎの生成
  - 例：我々の銀河系がこの特殊な場所に存在することを宇宙モデルが予言することはない
- 宇宙の構造に対する統計的な性質を引き出すことが、観測と宇宙論モデルを比較する上で本質的

# 相関関数とパワースペクトル

- 相関関数：

- ある距離だけ離れた場所の、密度ゆらぎの積の平均



$$\xi(x_{12}) = \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad x_{12} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

$$\langle \rho(\mathbf{x}_1)\rho(\mathbf{x}_2) \rangle = \bar{\rho}^2 [1 + \xi(x_{12})]$$

- 積分の恒等式

$$\int d^3x \rho(\mathbf{x}) = \bar{\rho} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty dx x^2 \xi(x) = 0$$

# 相関関数とパワースペクトル

- パワースペクトル

- フーリエ空間における相関関数の対応物

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k)$$

- デルタ関数は統計量の一様性を保証 (宇宙原理)

- 相関関数との関係：

- パワースペクトルは相関関数の3次元フーリエ変換になっている (ウィーナー・ヒンチン関係)

$$P(k) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \xi(|\mathbf{x}|) = 4\pi \int x^2 dx \frac{\sin(kx)}{kx} \xi(x)$$

$$\xi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} P(|\mathbf{k}|) = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\sin(kx)}{kx} P(k)$$

# 平均化した密度ゆらぎの分散

- あるスケールで平均化した密度ゆらぎの分散
  - 質量スケール  $M$  で平均化したゆらぎ

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \bar{\rho}, \quad \delta M = \int_{|\mathbf{x}| \leq R} d^3x \bar{\rho} \delta(\mathbf{x})$$

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} d^3x \delta(\mathbf{x}) = \int d^3x W_R(|\mathbf{x}|) \delta(\mathbf{x})$$

- トップハット型のウィンドウ
  - 半径  $R$  の球内で平均する

$$W_R(\mathbf{x}) = \frac{3}{4\pi R^3} \Theta(R - |\mathbf{x}|), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & (x \geq 0) \\ 0, & (x < 0) \end{cases}$$

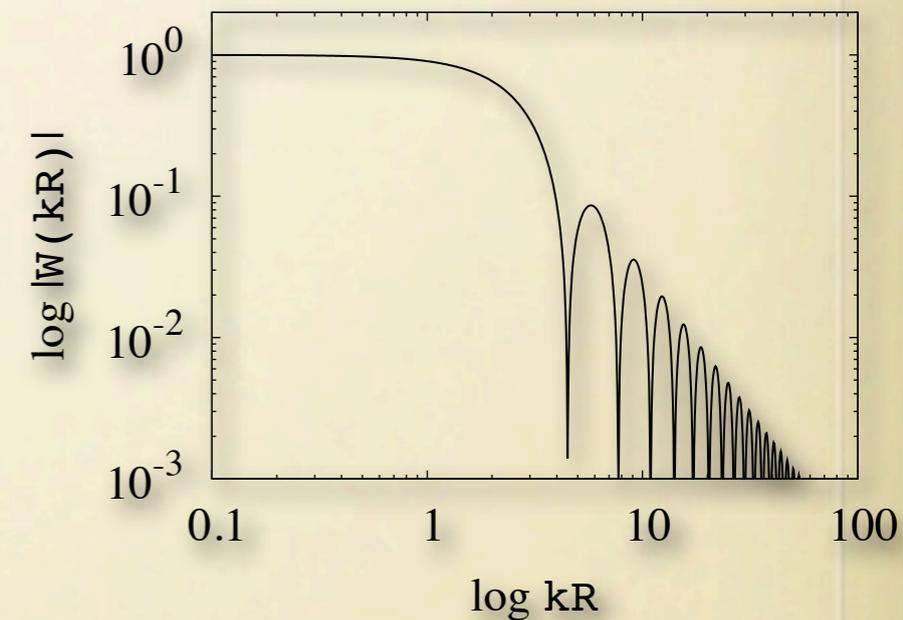
# 平均化した密度ゆらぎの分散

- 分散はパワースペクトルにより表される：

$$\sigma^2(R) \equiv \left\langle \left( \frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} W^2(kR) P(k)$$

- トッパット型ウィンドウ関数

$$\begin{aligned} W(kR) &= \int d^3x e^{-ik \cdot x} W_R(|x|) = 4\pi \int x^2 dx \frac{\sin(kx)}{kx} W_R(x) \\ &= \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)] \end{aligned}$$



- 他の例：ガウス型ウィンドウ関数

$$W_R(x) = \frac{e^{-x^2/2R^2}}{(2\pi)^{3/2} R^3}, \quad W(kR) = e^{-k^2 R^2/2}$$

# 初期パワースペクトル

- ハリソン・ゼルドビッチスペクトル

- ハッブルスケールで平均化した密度ゆらぎの分散が一定

Hubble radius (comoving):  $R_H(t) = \frac{c}{aH}$

Gauge-invariant density fluc.:  $\Delta \propto R_H^2$  (valid for both RD and MD),

assume power-law PS:  $P_{\text{prim}}(k) \propto k^n$

$$\Rightarrow \sigma^2(R_H(t), t) \propto R_H^4 \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} W^2(kR_H) k^n \propto R_H^{1-n}$$

- これが一定となるのは：

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{prim}}(k) \propto k \quad : \text{Harrison-Zel'dovich spectrum}$$

# 初期パワースペクトル

- インフレーションモデルによる初期パワースペクトル

- 単一のスカラー場がスローロールするインフレーションモデルでは、ハリソン・ゼルドビッチスペクトルに近くなる

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad \Rightarrow \quad \text{potential should be sufficiently flat}$$

$$\text{slow roll parameters: } \epsilon \equiv \frac{c^4}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad \eta \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \frac{V''}{V} \quad \text{are small}$$

- インフレーションにより予言される量子ゆらぎ：

$$\sigma^2(R_H) \sim \frac{\hbar H^4}{c\dot{\phi}^2} \propto \frac{V^3}{V'^2}, \quad \frac{d}{d \ln R_H} \simeq \frac{R_H \dot{\phi}}{\dot{R}_H} \frac{d}{d\phi} \simeq \frac{c^4}{8\pi G} \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi}$$

$$\Rightarrow n = 1 - \frac{d \ln \sigma^2(R_H)}{d \ln R_H} = 1 - 6\epsilon + 2\eta$$

- このようなモデルではハリソン・ゼルドビッチスペクトルからのわずかなずれもあってよい

# 遷移関数 (Transfer function)

- 初期スペクトルはスケールごとに異なる時間発展
  - 超ホライズンスケール：スケールによらない成長
  - ホライズン内スケール：複数の物理効果によって成長が抑制され、スペクトル形が変形される
    - 放射優勢期にはゆらぎが成長しない
    - 音響振動
- 線形領域でのスペクトル形の変形は「遷移関数」(transfer function)  $T(k,t)$  により表現できる（線形領域では波長ごとに独立な成長をするため）

$$\begin{cases} \Delta(\mathbf{k}, t) \propto D(t)\Delta_{\text{init}}(\mathbf{k}) & (\text{super-horizon}) \\ \Delta(\mathbf{k}, t) \propto T(k, t)D(t)\Delta_{\text{init}}(\mathbf{k}) & (\text{general}) \end{cases}$$

$$T(k, t) = \frac{D(t_{\text{init}})}{D(t)} \frac{\Delta(\mathbf{k}, t)}{\Delta_{\text{init}}(\mathbf{k})} \quad D(t) : \text{linear growth factor}$$

# 遷移関数

- 遷移関数の正確な形はボルツマン方程式の数値計算により得られる
  - 公開されているボルツマンコードが広く使われている (CMBfast, CAMB, etc.)

<http://camb.info/>

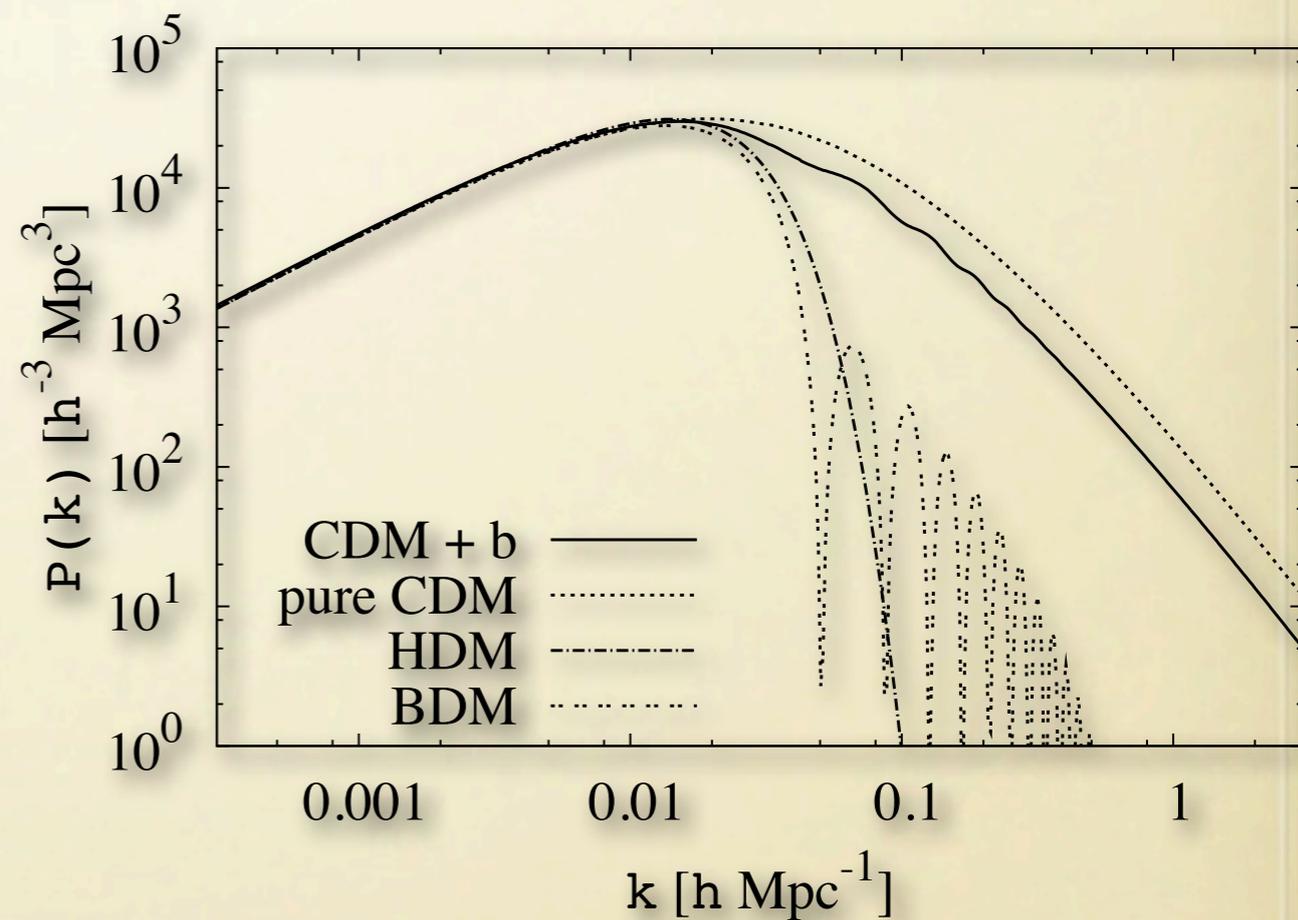
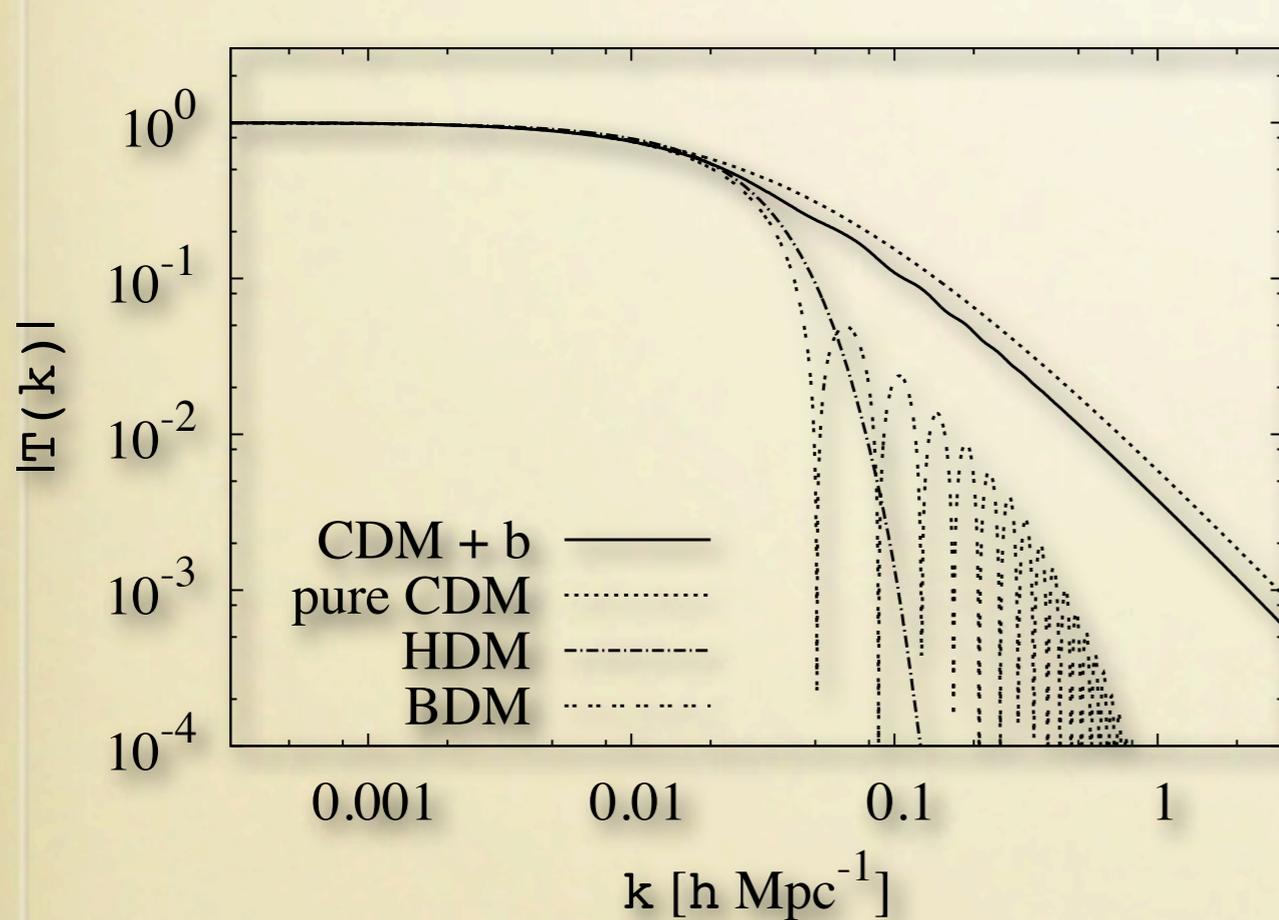
<http://www.cfa.harvard.edu/~mzaldarr/CMBFAST/cmbfast.html>

- 任意時刻での線形パワースペクトル：

$$P(k, t) = \frac{D^2(t)}{D^2(t_{\text{init}})} T^2(k, t) P_{\text{init}}(k)$$

# 遷移関数

- 遷移関数とパワースペクトルの形の例



# パワースペクトルの規格化

- スペクトル全体の振幅は自由パラメータであり、観測から決められる量

- 例：  $P(k, t) = A_0 D^2(t) k^n T^2(k, t)$

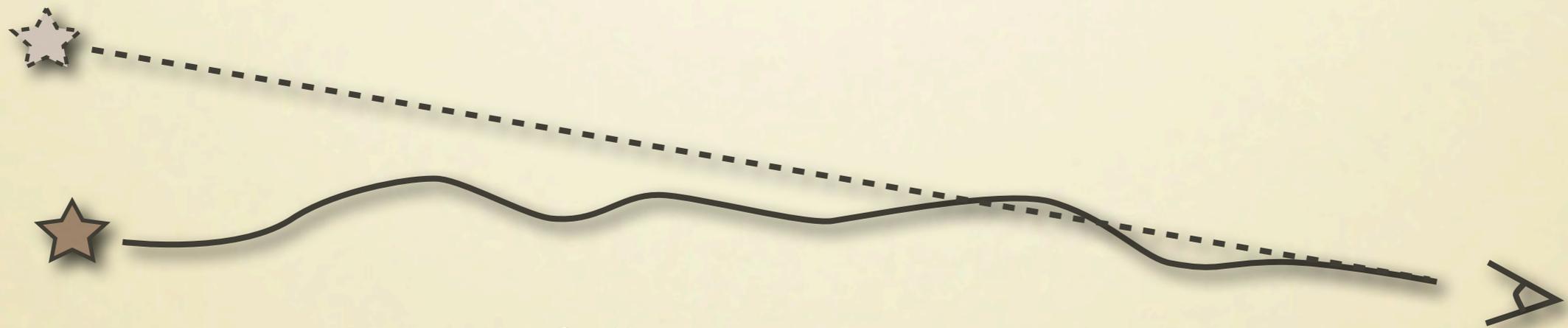
- この全体振幅  $A_0$  の代わりに、8 Mpc/h の球内で平均化した現在の密度ゆらぎの分散もよく使われる：

$$\sigma_8^2 = \frac{A_0}{2\pi^2} \int dk k^{n+2} W^2(k \cdot 8h^{-1} \text{Mpc}) T^2(k, t_0)$$

- Note: 2つの規格化の量は比例するが、その比例定数の値は他の宇宙論パラメータに依存する

# 非一様宇宙における光の伝播

- 光線は測地線方程式にしたがってゆらいだ時空中を伝播してくる
- 観測される赤方偏移や角度方向は、視線方向の重力ポテンシャルゆらぎによって変化する



$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu P^\nu P^\lambda = 0$$

# 非一様宇宙における光の伝播

- 測地線方程式

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu P^\nu P^\lambda = 0$$

- ゆらいだ時空でのクリストッフェル記号（線形ゆらぎ、物質は完全流体を仮定）

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\Phi}}{c^3}, \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = \frac{\Phi_{,i}}{c^2}, \quad \Gamma_{00}^i = \frac{\Phi^{,i}}{c^2 a^2}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a^2}{c} \left[ \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{c^2} \left( \dot{\Phi} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \Phi \right) \right] \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\Phi}}{c^2} \right) \delta^i_j$$

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i - \frac{1}{c^2} \left( \delta^i_j \Phi_{,k} + \delta^i_k \Phi_{,j} - \gamma_{jk} \gamma^{il} \Phi_{,l} \right)$$

- 線形ゆらぎの測地線方程式

$$\frac{d}{d\lambda} (a^2 Q) - \frac{2a^3 Q^2}{c^3} \dot{\Phi} = 0 \quad \left[ Q \equiv \sqrt{\gamma_{ij} P^i P^j}, \quad n^i \equiv \frac{P^i}{Q} \right]$$

$$\frac{dn^i}{d\lambda} + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i n^j n^k Q + \frac{2Q}{c^2} (\gamma^{ij} - n^i n^j) \Phi_{,j} = 0$$

# 非一様宇宙における赤方偏移

- 線形ゆらぎの測地線方程式の時間成分を積分

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\delta Q}{\bar{Q}} \right) = \frac{2a\bar{Q}}{c^3} \dot{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta Q}{\bar{Q}} \Big|_e^0 = \frac{2}{c^3} \int_e^0 a\bar{Q}\dot{\Phi} d\lambda = \frac{2}{c^2} \int_e^0 \dot{\Phi} dt$$

- 線形ゆらぎ効果を含む赤方偏移

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{-u_\mu P^\mu \Big|_e}{-u_\mu P^\mu \Big|_o} \quad \& \quad -u_\mu P^\mu = aQ \left( 1 - \frac{n^i v_i}{c} - \frac{\Phi}{c^2} \right)$$

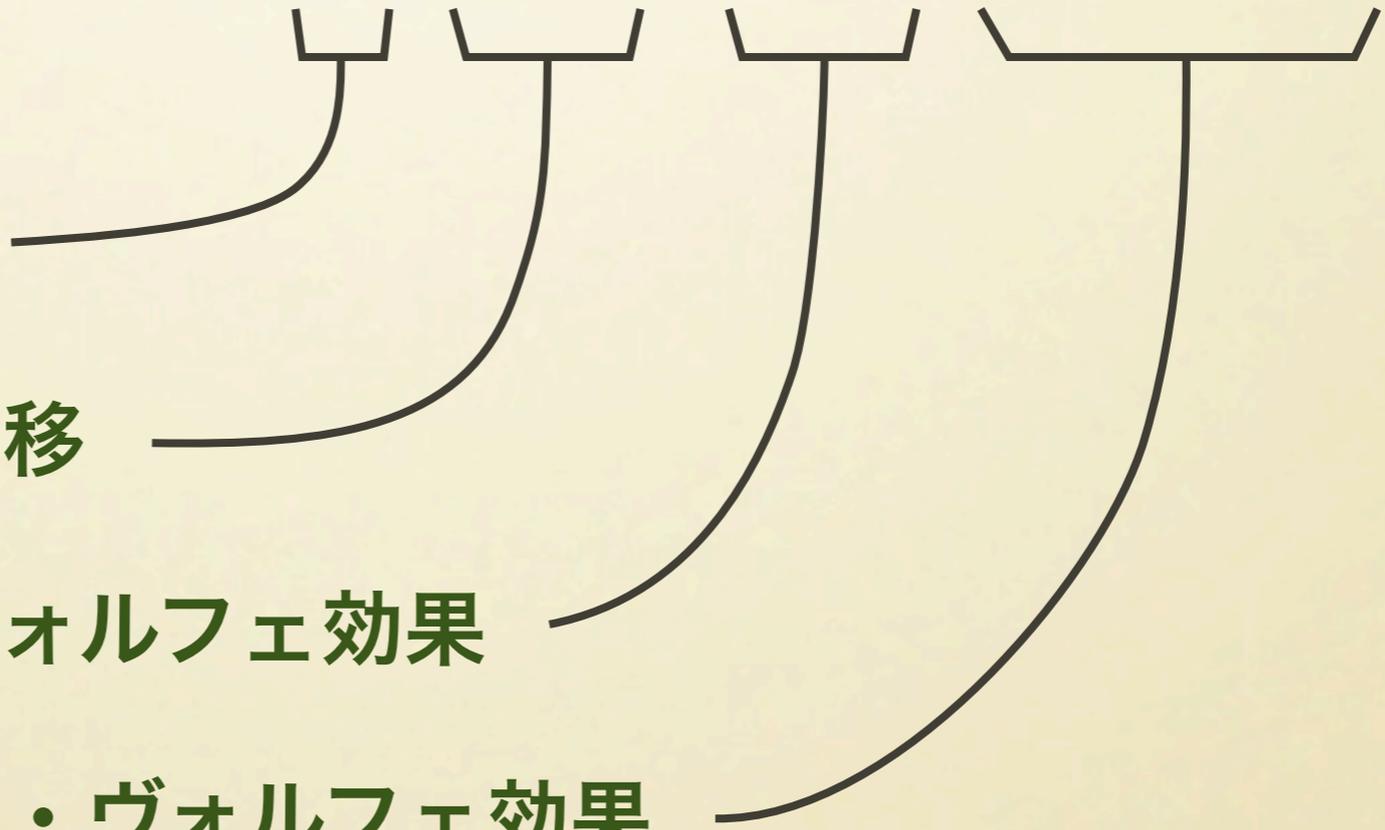
$$\Rightarrow \quad 1 + z = \frac{a_o}{a_e} \left( 1 + \frac{n^i v_i}{c} \Big|_e^0 + \frac{\Phi}{c^2} \Big|_e^0 - \frac{2}{c^2} \int_e^0 \dot{\Phi} dt \right)$$

# 非一様宇宙における赤方偏移

- 線形ゆらぎを入れた赤方偏移

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{-u_\mu P^\mu|_e}{-u_\mu P^\mu|_o} = \frac{a_o}{a_e} \left( 1 + \frac{n^i v_i}{c} \right)_e + \frac{\Phi}{c^2} \Big|_e - \frac{2}{c^2} \int_e^o \dot{\Phi} dt$$

- 一様な膨張
- ドップラー偏移
- ザックス・ヴォルフエ効果
- 積分ザックス・ヴォルフエ効果



# 非一様宇宙における観測角方向

- 空間3次元計量を動径方向成分と角度方向成分に分解

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + S_K^2(x) \omega_{ab} d\theta^a d\theta^b \quad (\omega_{ab} d\theta^a d\theta^b = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$${}^{(3)}\Gamma_{11}^1 = {}^{(3)}\Gamma_{1a}^1 = {}^{(3)}\Gamma_{a1}^1 = {}^{(3)}\Gamma_{11}^a = 0, \quad {}^{(3)}\Gamma_{ab}^1 = -S_K(x)C_K(x)\omega_{ab}$$

$${}^{(3)}\Gamma_{1b}^a = {}^{(3)}\Gamma_{b1}^a = \frac{C_K(x)}{S_K(x)}\delta^a_b, \quad {}^{(3)}\Gamma_{bc}^a = {}^{(2)}\Gamma_{bc}^a$$

- 便利な関数：

$$S_K(x) = \begin{cases} \sinh(\sqrt{-K}x) / \sqrt{-K} & (K < 0) \\ x & (K = 0) \\ \sin(\sqrt{K}x) / \sqrt{K} & (K > 0) \end{cases}, \quad C_K(x) \equiv \frac{dS_K(x)}{dx} = \begin{cases} \cosh(\sqrt{-K}x) & (K < 0) \\ 1 & (K = 0) \\ \cos(\sqrt{K}x) & (K > 0) \end{cases}$$

$$C_K^2(x) + KS_K^2(x) = 1, \quad \frac{dC_K(x)}{dx} = -KS_K(x), \quad S_K(x-x') = S_K(x)C_K(x') - C_K(x)S_K(x')$$

# 非一様宇宙における観測角方向

- 測地線方程式の角度成分

$$\frac{dn^a}{d\lambda} - 2Q \frac{C_K(x)}{S_K(x)} n^a + \frac{2Q}{c^2} \frac{\omega^{ab} \Phi_{,b}}{S_K^2(x)} = 0$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = Q\bar{n}^1 = -Q, \quad n^a = \frac{P^a}{Q} = \frac{1}{Q} \frac{d\theta^a}{d\lambda} = -\frac{d\theta^a}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ S_K^2(x) \frac{d\theta^a}{dx} \right] = -\frac{2}{c^2} \omega^{ab} \Phi_{,b}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta^a(x)}_{\text{実際の角度座標}} - \underbrace{\theta^a(0)}_{\text{観測される角度方向}} = -\frac{2}{c^2} \int_0^x \frac{dx''}{S_K^2(x'')} \int_0^{x''} dx' \omega^{ab} \Phi_{,b} [x', \vec{\theta}(x'), t(x')]$$

実際の角度座標

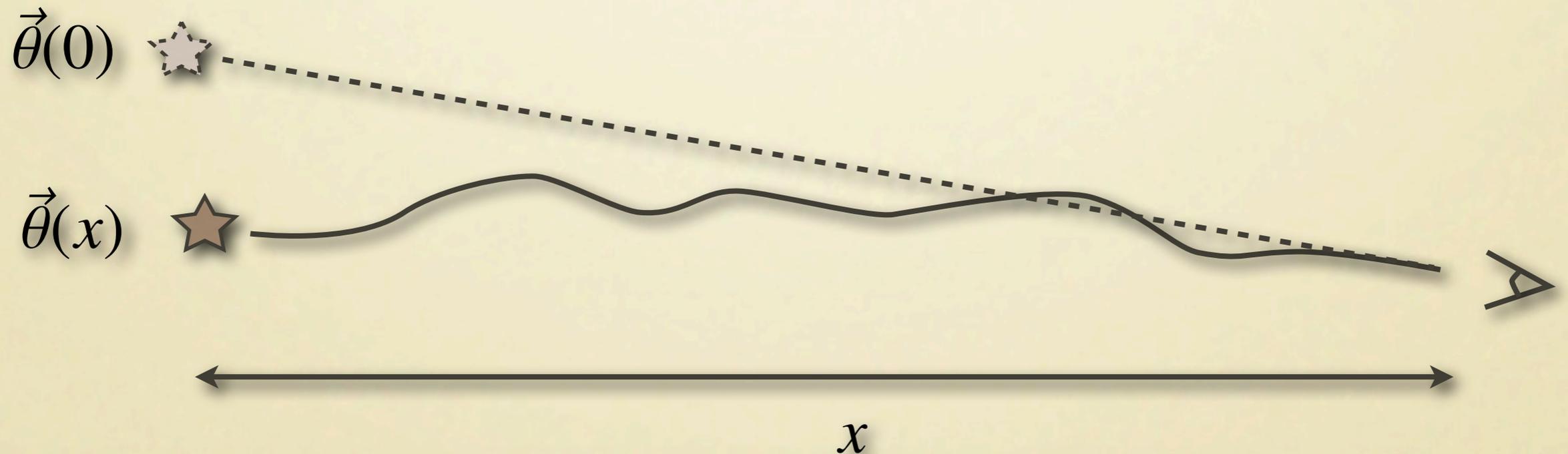
観測される角度方向

# 非一様宇宙における観測角方向

- ボルン近似による解

$$\theta^a(x) = \theta^a(0) - \frac{2}{c^2} \int_0^x dx' \frac{S_K(x-x')}{S_K(x)S_K(x')} \omega^{ab} \Phi_{,b} [x', \vec{\theta}(0), t(x')]$$

- この式は重力レンズにおける基本式



# 第四部のまとめ

- 宇宙論的観測は統計である
- 遷移関数：
  - 初期パワースペクトルと現在のパワースペクトルの関係を波長ごとに与える関数
- 光の伝播に対する測地線方程式の線形ゆらぎ
  - 時間成分：
    - ドップラー偏移、(積分) ザックス・ヴォルフエ効果
  - 角度成分：
    - 重力レンズ効果

## 第五部

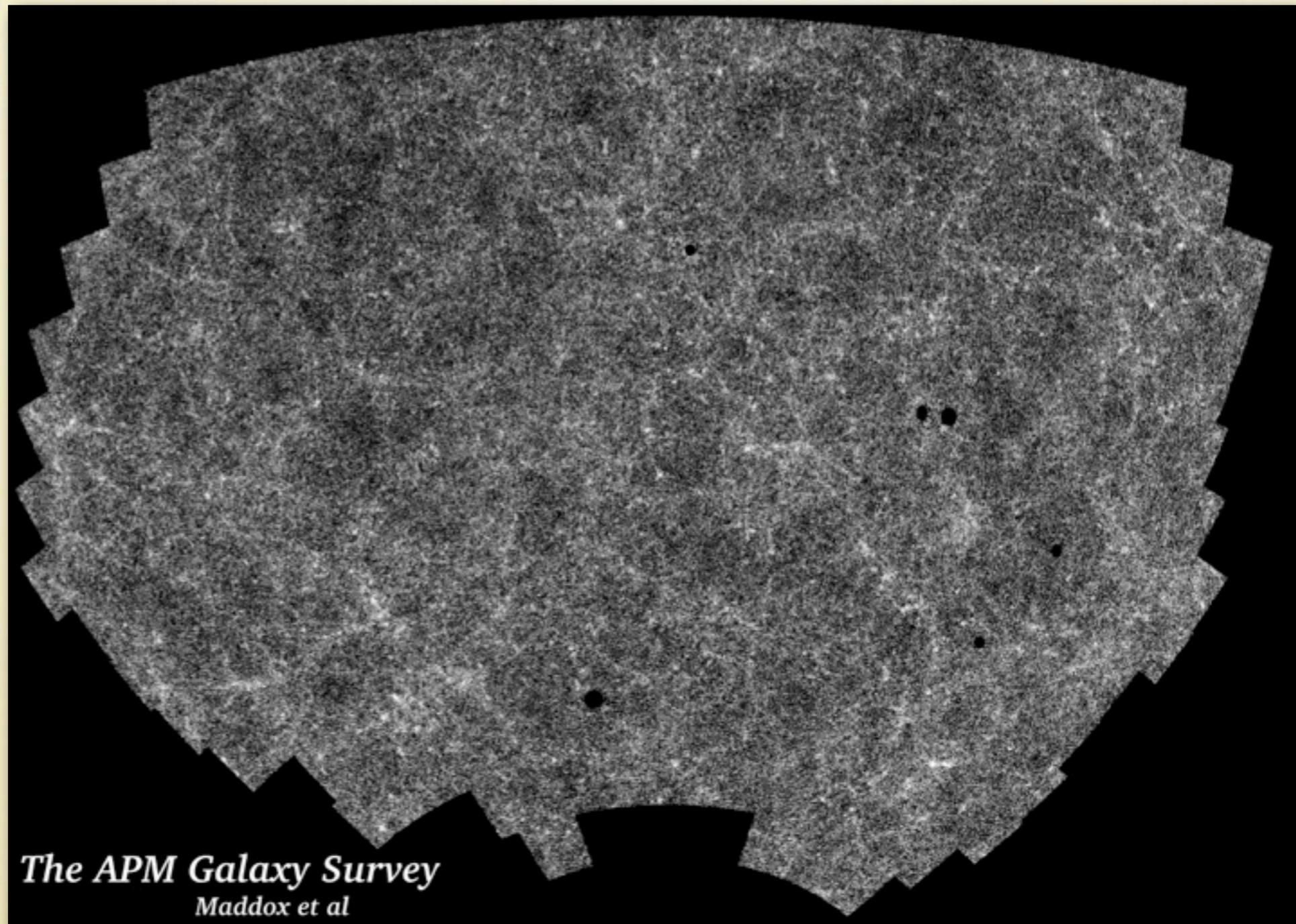
# 銀河サーベイの理論と観測

# 銀河サーベイ

- 1次元サーベイ
  - ペンシルビーム・サーベイ
    - 狭い領域にある多数の銀河の赤方偏移を調べる
- 2次元サーベイ
  - 撮像サーベイ
    - 広い天域に観測される銀河の角方向を観測、天球面上の2次元カタログ
- 3次元サーベイ
  - 赤方偏移サーベイ
    - ある程度広い天域に観測される銀河をなるべく一様に選んで赤方偏移を観測、奥行き方向の情報が付与された3次元カタログ

# 撮像サーベイ

- 撮像サーベイの例：APM galaxy survey



# 撮像サーベイ

- 天球面上の2次元数密度

$$n_{2D}(\theta, \phi) = \int_0^\infty dx S_K^2(x) n_g(x, \theta, \phi)$$

↘ 3次元数密度

- 数密度ゆらぎ

$$\delta_{2D}(\theta, \phi) = \int_0^\infty dx w_g(x) \delta_g(x, \theta, \phi), \quad w_g(x) = \frac{S_K^2(x) \bar{n}_g(x)}{\int_0^\infty dx' S_K^2(x') \bar{n}_g(x')}$$

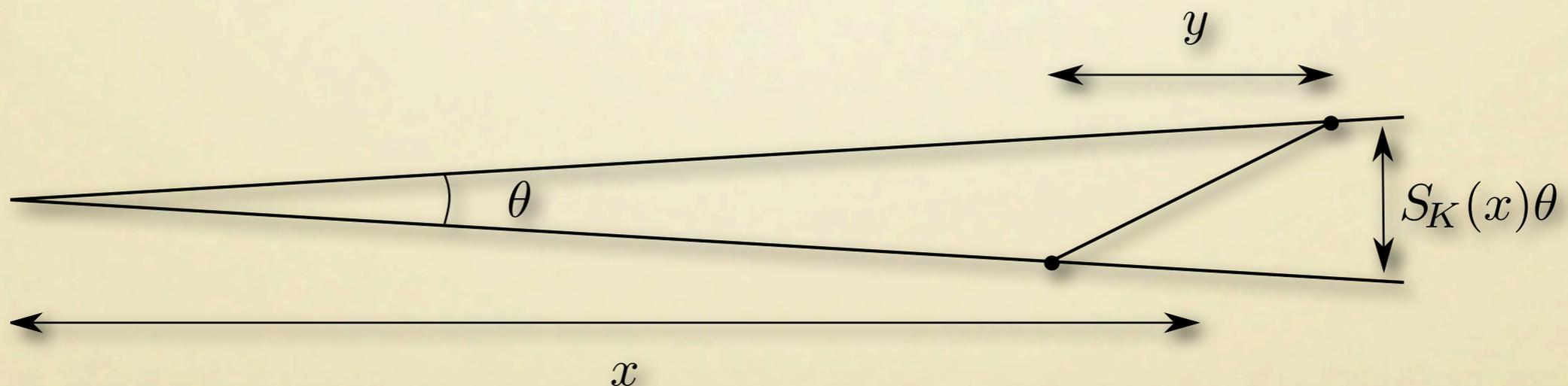
# 角度相関関数

- 天球面上2次元相関関数

$$\begin{aligned} w(\theta_{12}) &= \langle \delta_{2D}(\theta_1, \phi_1) \delta_{2D}(\theta_2, \phi_2) \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 w_g(x_1) w_g(x_2) \underbrace{\langle \delta_g(x_1, \theta_1, \phi_1) \delta_g(x_2, \theta_2, \phi_2) \rangle}_{= \xi_g(x_{12}, t)} \end{aligned}$$

- リンバー近似

$$\text{when } x_{12} \ll x_1, x_2 \quad \Rightarrow \quad x_{12} \simeq \sqrt{S_K^2(x_1) \theta_{12}^2 + (x_1 - x_2)^2}$$



# 角度相関関数

- リンバーの式

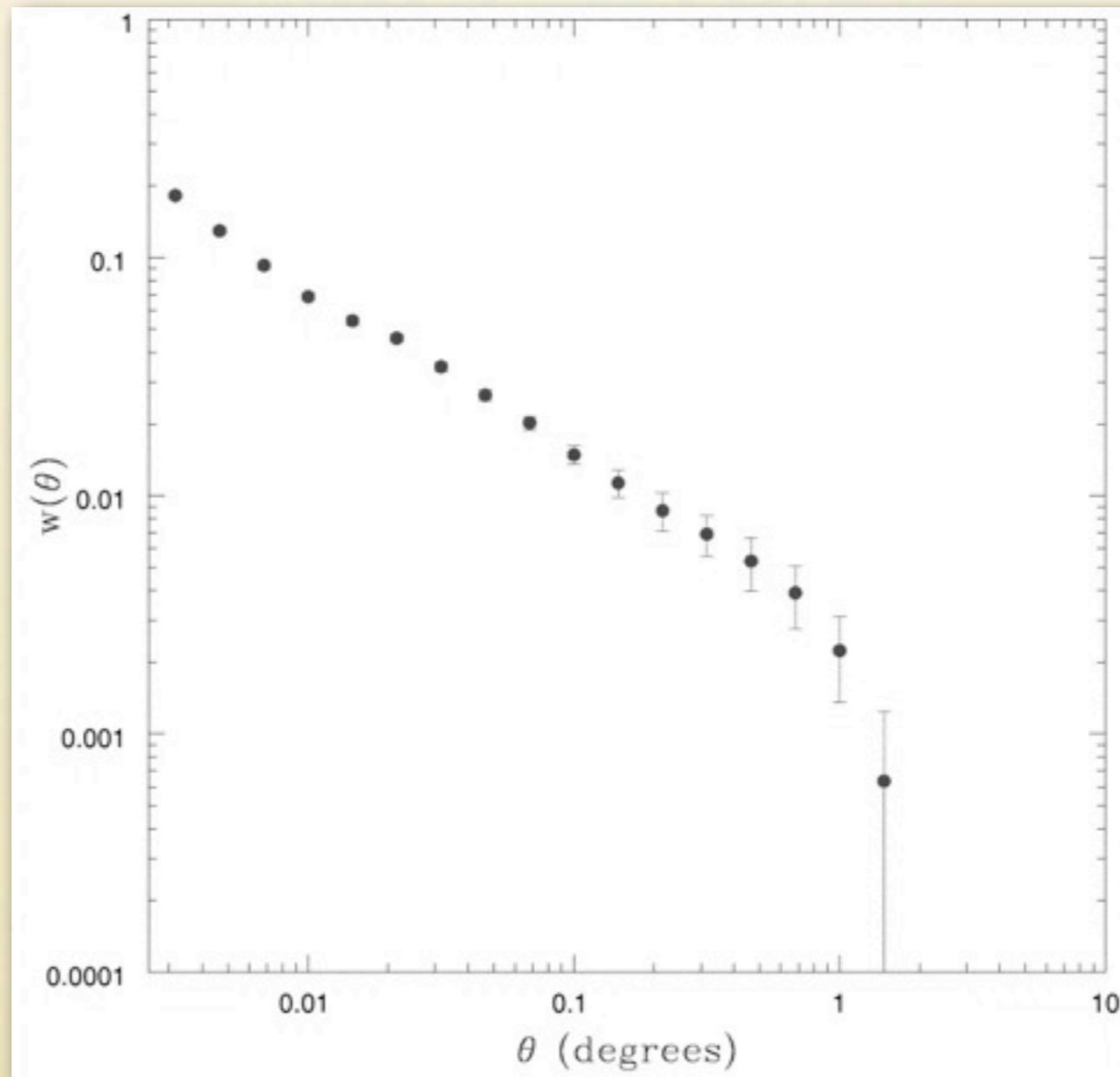
$$w(\theta) = \int dx w_g^2(x) \int dy \xi_g \left( \sqrt{S_K^2(x) \theta^2 + y^2}, t(x) \right)$$

- 3次元パワースペクトルで表したリンバーの式

$$w(\theta) = \int_0^\infty dx w_g^2(x) \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} J_0 [kS_K(x)\theta] P_g[k, t(x)]$$

# 角度相関関数

- 例：Sloan Digital Sky Survey (SDSS) で測定された角度相関関数



# 角度パワースペクトル

- 天球面上の調和関数展開

$$\delta_{2D}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi), \quad a_{lm} = \int \sin \theta d\theta d\phi Y_l^{m*}(\theta, \phi) \delta_{2D}(\theta, \phi)$$

- 角度パワースペクトル  $C_l$  の定義

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l$$

- 相関に対角成分しかないのは、統計的等方性による

- リンバー近似における3次元パワースペクトルとの関係：

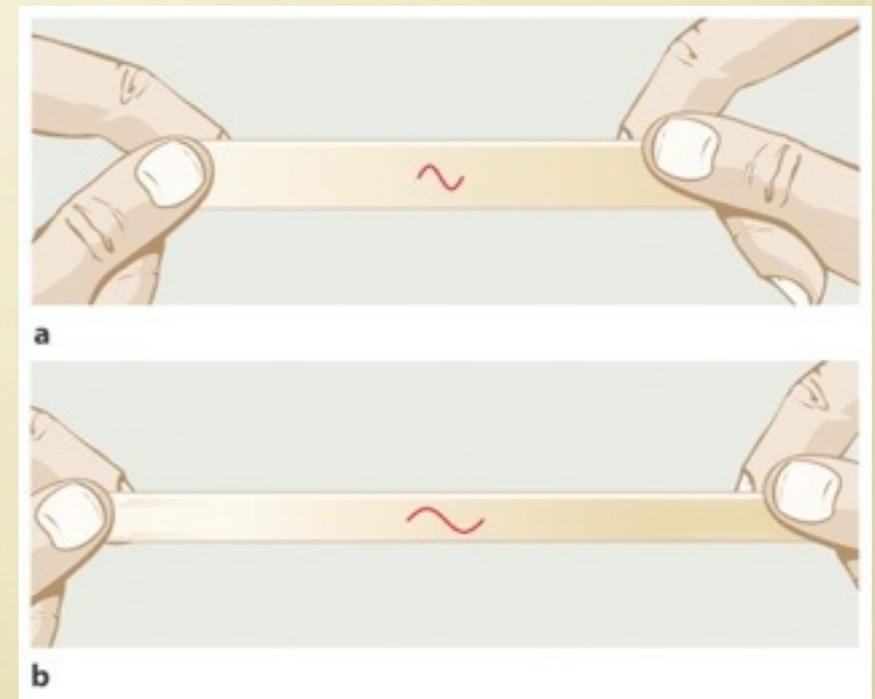
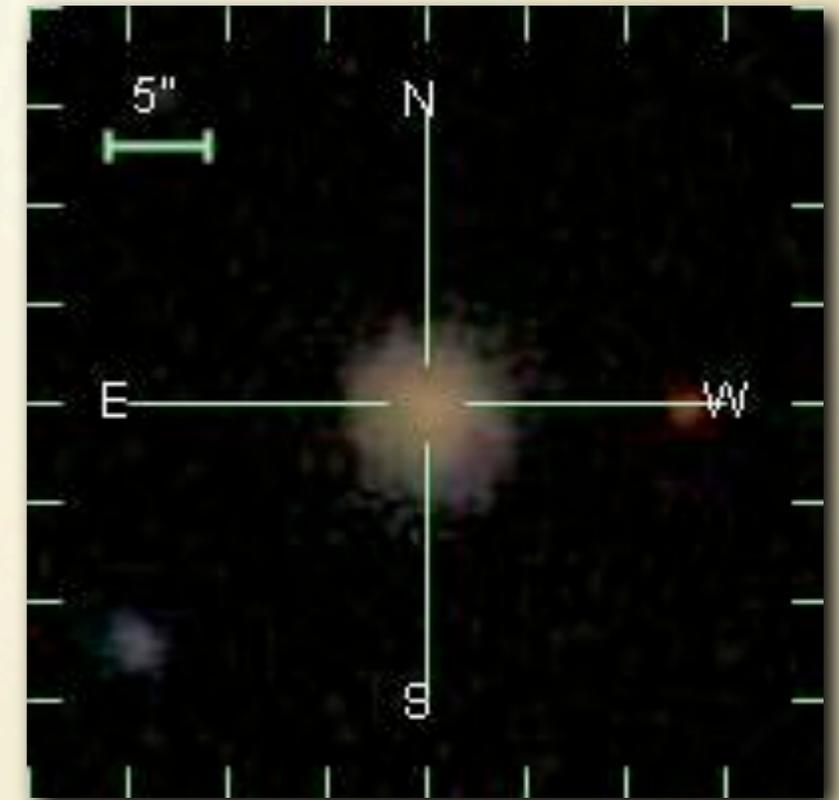
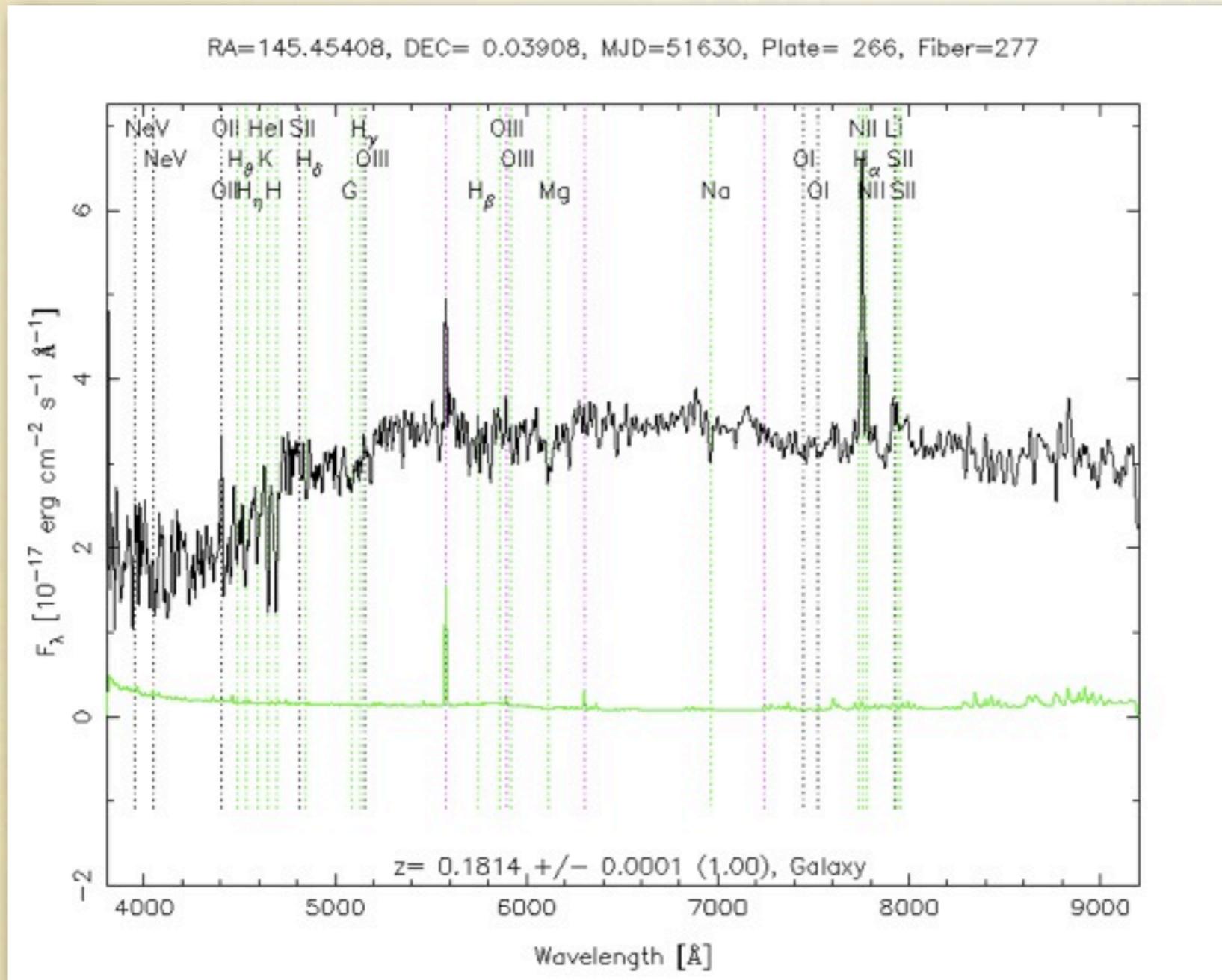
$$C_l \simeq \int_0^{\infty} dx \frac{w_s^2(x)}{S_K^2(x)} P_g \left[ \frac{l}{S_K(x)}, t(x) \right]$$

# 赤方偏移サーベイ

- 銀河の3次元マッピングのためには動径方向の距離測定が必要
  - 距離を直接求めるのは困難
  - 銀河の赤方偏移により距離を推定することはできる
    - ただし実際の正しい距離が得られるわけではない
- 赤方偏移サーベイ：
  - できるだけ広く一様に選んだ多数の銀河について、角度方向と赤方偏移を測定する観測

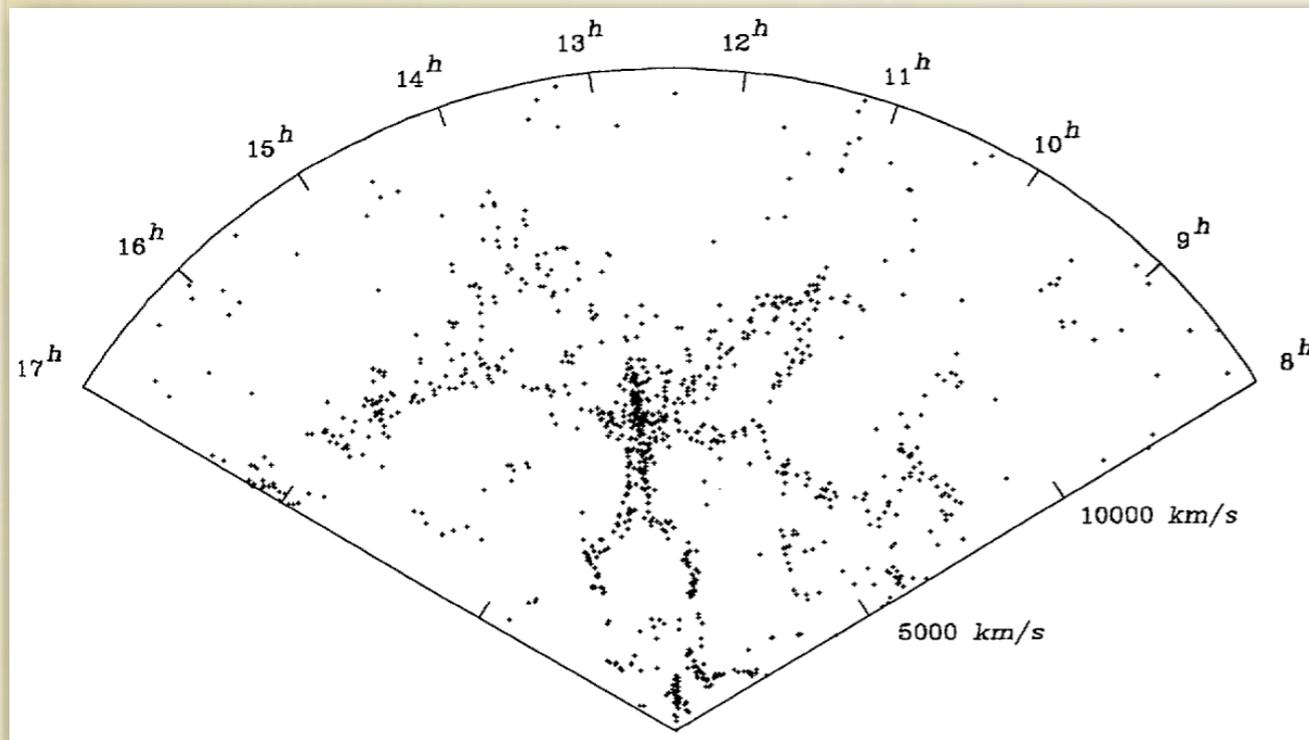
# 赤方偏移サーベイ

- 銀河の典型的なスペクトル

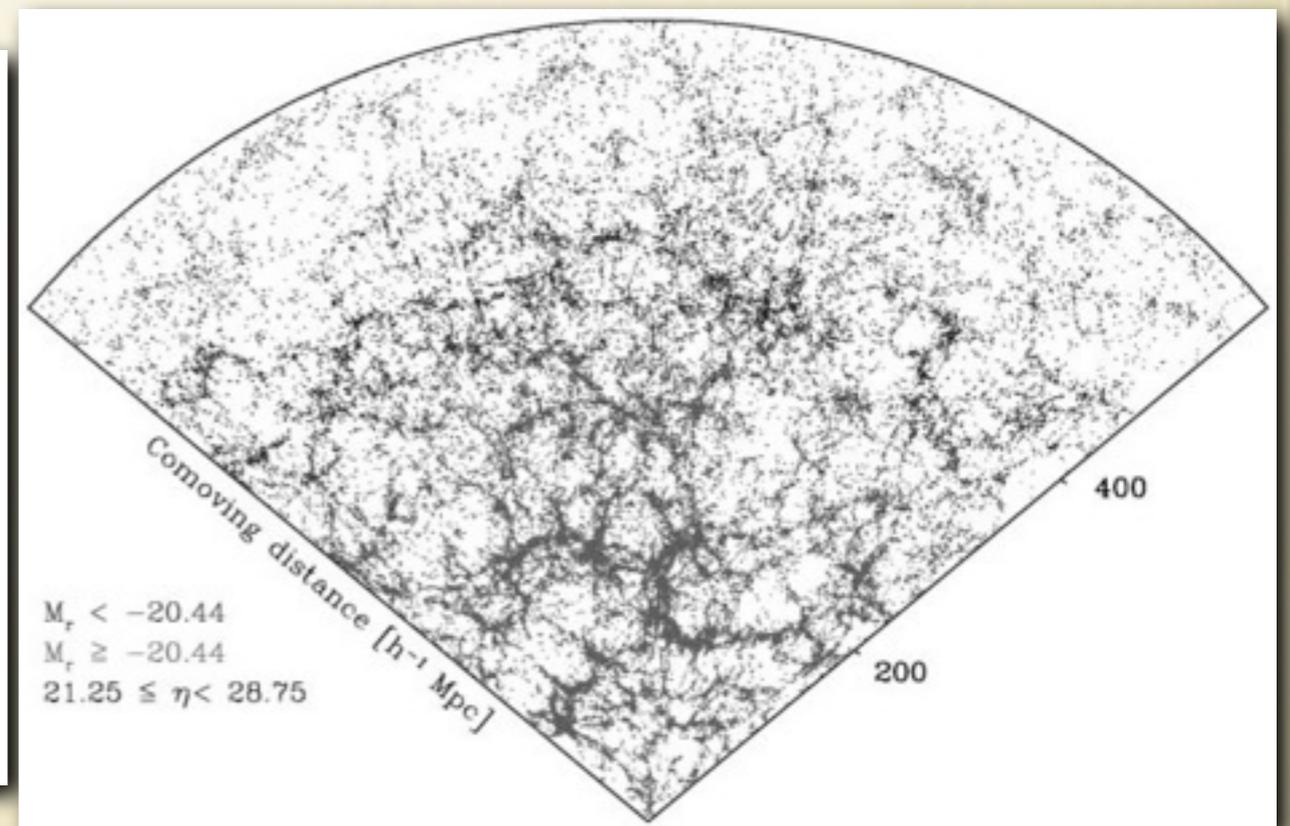


# 赤方偏移サーベイ

- 赤方偏移サーベイの例
  - 「コーン図」により表された銀河分布
  - CfA survey (1986), SDSS (2000-2008)



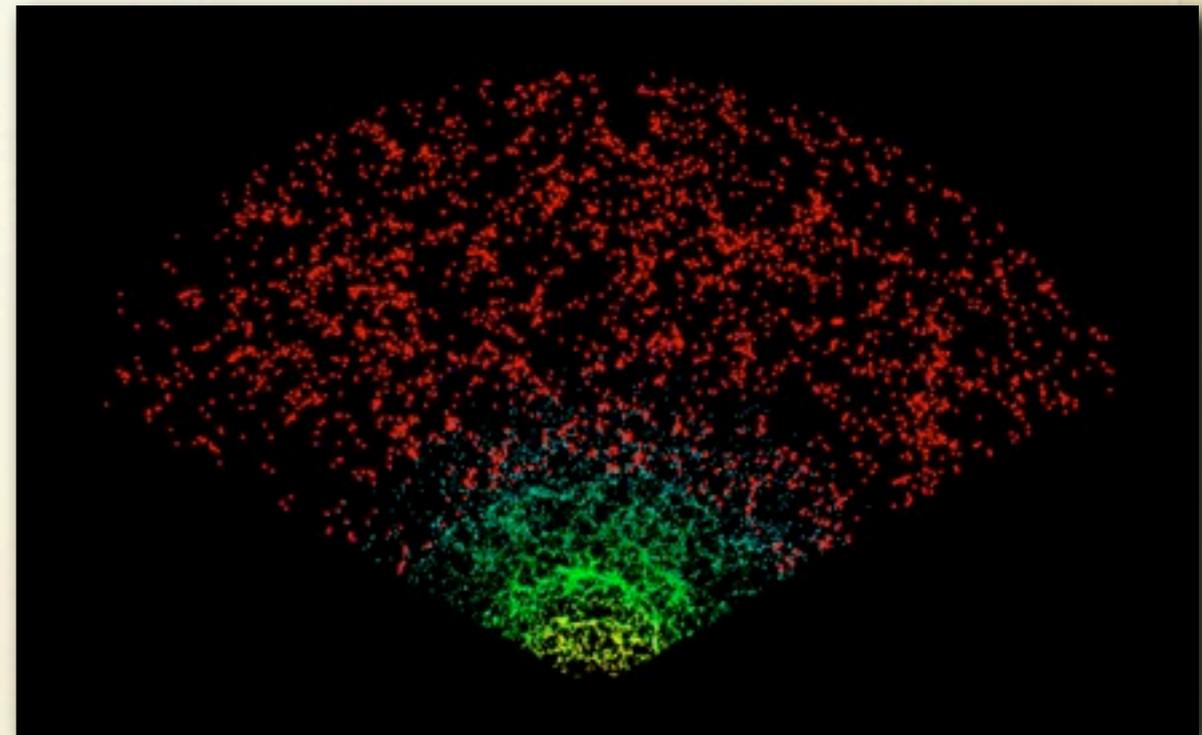
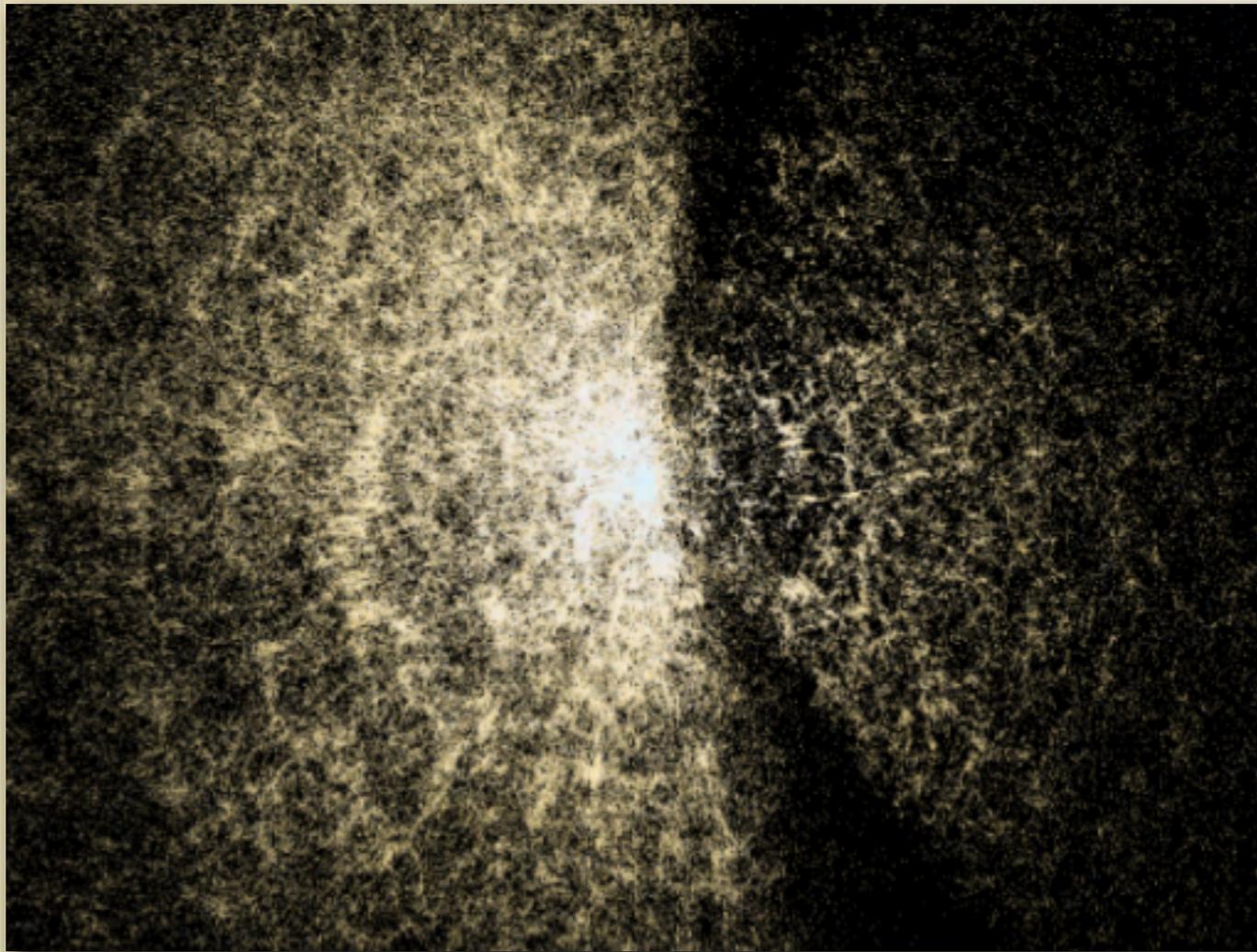
CfA survey, ~ 1,000 galaxies



SDSS survey, ~ 1,000,000 galaxies

# 赤方偏移サーベイ

- SDSS (Sloan Digital Sky Survey) : これまでのところ最大の赤方偏移サーベイ



# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- 赤方偏移サーベイにおいては、動径座標は単なる赤方偏移の値で、本当の距離には比例していない

- 本当の距離からずれる理由：

- 赤方偏移-距離関係（宇宙論モデルに依存）
- 銀河の特異速度によるドップラー偏移
- （積分）ザックス・ヴォルフェ効果

$$x(z) = \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}$$

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{-u_\mu P^\mu|_e}{-u_\mu P^\mu|_o} = \frac{a_o}{a_e} \left( 1 + \frac{n^i v_i}{c} \Big|_e + \frac{\Phi}{c^2} \Big|_e - \frac{2}{c^2} \int_e^o \dot{\Phi} dt \right)$$

# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- 赤方偏移サーベイにおいて、ドップラー偏移は距離推定をゆがめる支配的な効果

- ザックス・ヴォルフェ効果は小さいので落とすと

$$z = \bar{z} + \frac{V - V_0}{ca}$$

$$\left( V = -n^i v_i \Big|_e, \quad V_0 = -n^i v_i \Big|_o, \quad \bar{z} : \text{unperturbed redshift} \right)$$

- 「赤方偏移空間の共動距離」を定義：

$$s \equiv \int_0^z \frac{c dz}{H(z)} = x + \frac{V - V_0}{aH}$$

# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- 遠方観測者近似：

- 観測者はサーベイ体積サイズより十分遠方にいるとして、視線方向を第3軸に固定

$$(s_1, s_2, s_3) = \left( x_1, x_2, x_3 + \frac{V - V_0}{aH} \right)$$

- 赤方偏移空間の数密度や密度ゆらぎには体積変換ヤコビアンからの寄与が付け加わる：

$$n_g(\mathbf{x})d^3x = n_s(\mathbf{s})d^3s$$

$$\Rightarrow n_s(\mathbf{s}) = J^{-1}n_g(\mathbf{x}) = \left[ 1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{v_3}{aH} \right) \right] n_g(\mathbf{x}),$$

(線形近似)

$$\delta_s(\mathbf{s}) = \delta_g(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{v_3}{aH} \right) \quad (v_3 = V)$$

# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- フーリエ変換

$$\tilde{\delta}_s(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}_g(\mathbf{k}) - \frac{ik_3}{aH} \tilde{v}_3(\mathbf{k}), \quad \tilde{v}_3(\mathbf{k}) = aHf \frac{ik_3}{k^2} \tilde{\delta}(\mathbf{k})$$

銀河数密度ゆらぎ

質量密度ゆらぎ

- 「銀河バイアス」

- 質量密度ゆらぎと銀河数密度ゆらぎは一般に異なる
- 線形近似の成り立つ大スケールでは、「線形バイアス」がよい近似

$$\delta_g(\mathbf{x}) = b \delta(\mathbf{x}) \quad (b : \text{bias parameter})$$

- $b$ : バイアスパラメータ (空間的に一定)

# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- 以上の近似により

$$\tilde{\delta}_s(\mathbf{k}) = b \left(1 + \beta\mu^2\right) \tilde{\delta}(\mathbf{k}), \quad \left(\beta \equiv \frac{f}{b}, \quad \mu \equiv \frac{k_3}{k}\right)$$

- パワースペクトル：カイザーの公式

$$P_s(k) = \left(1 + \beta\mu^2\right)^2 P_g(k), \quad \left[P_g(k) = b^2 P(k)\right]$$

- 銀河パワースペクトルの振幅は赤方偏移空間で増幅

- この増幅は視線方向と波数方向の相対角度に依存

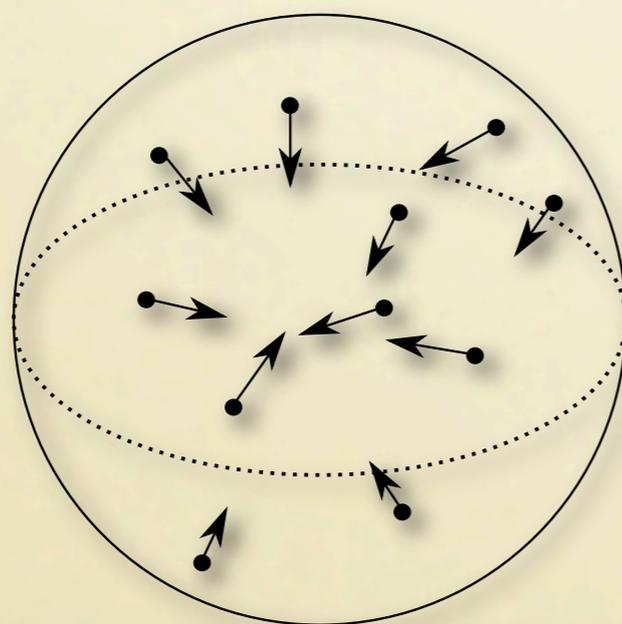
# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- 特異速度によるドップラー偏移の効果：

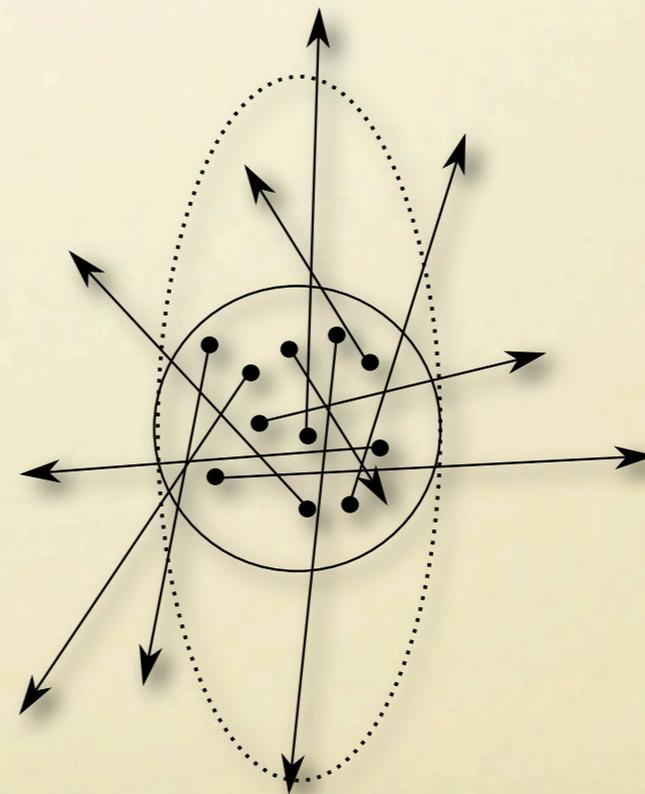
- 大スケール線形領域では、パワーが増大
- 小スケール非線形領域では、パワーが減少

大スケール：  
「カイザー効果」

小スケール：  
「神の指」効果  
(Fingers-of-God)



↑  
視線方向

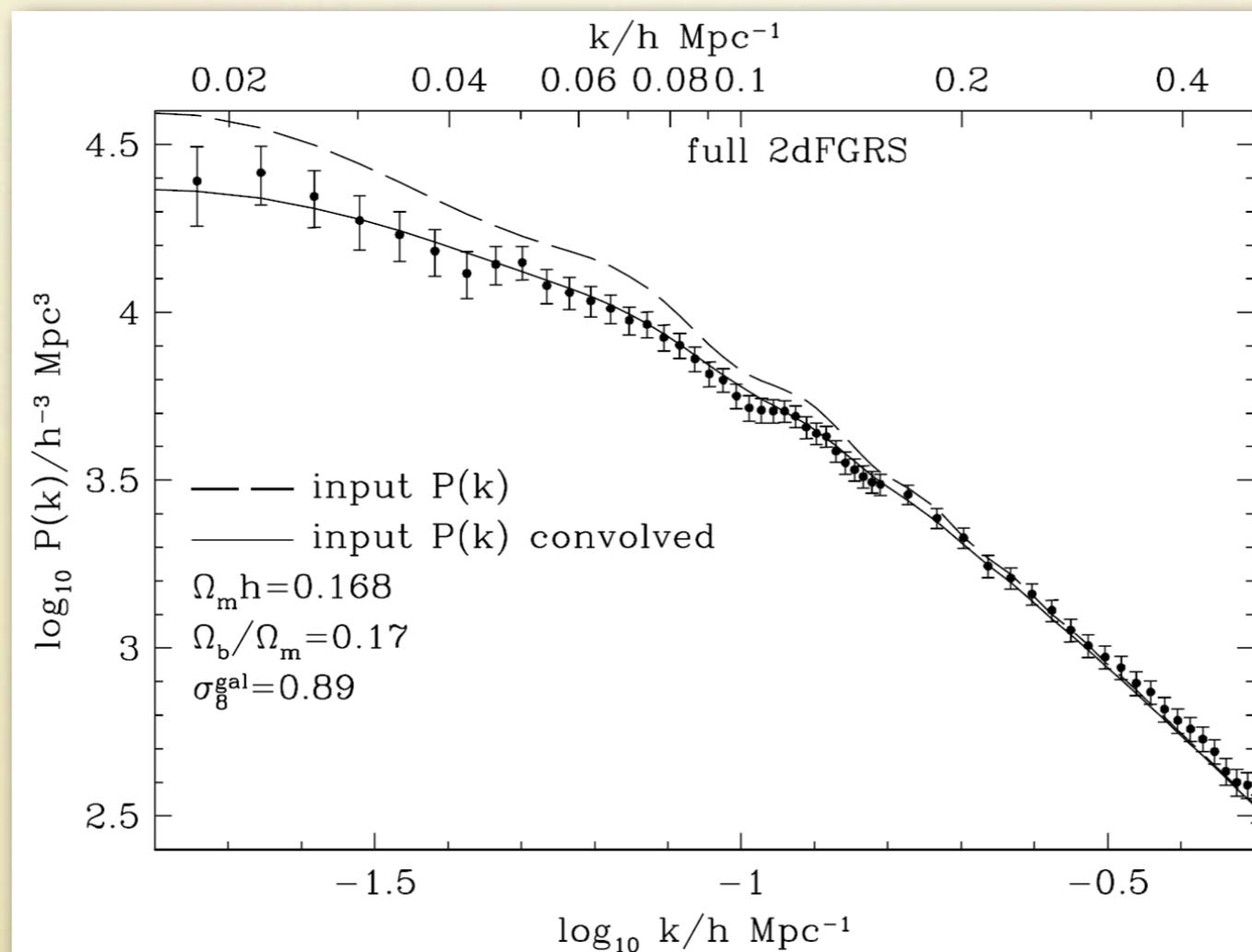


# 赤方偏移空間のパワースペクトル

- 方向平均したパワースペクトルと相関関数

$$\bar{P}_s(k) = \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) P_g(k), \quad \bar{\xi}_s(x) = \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) \xi_g(x)$$

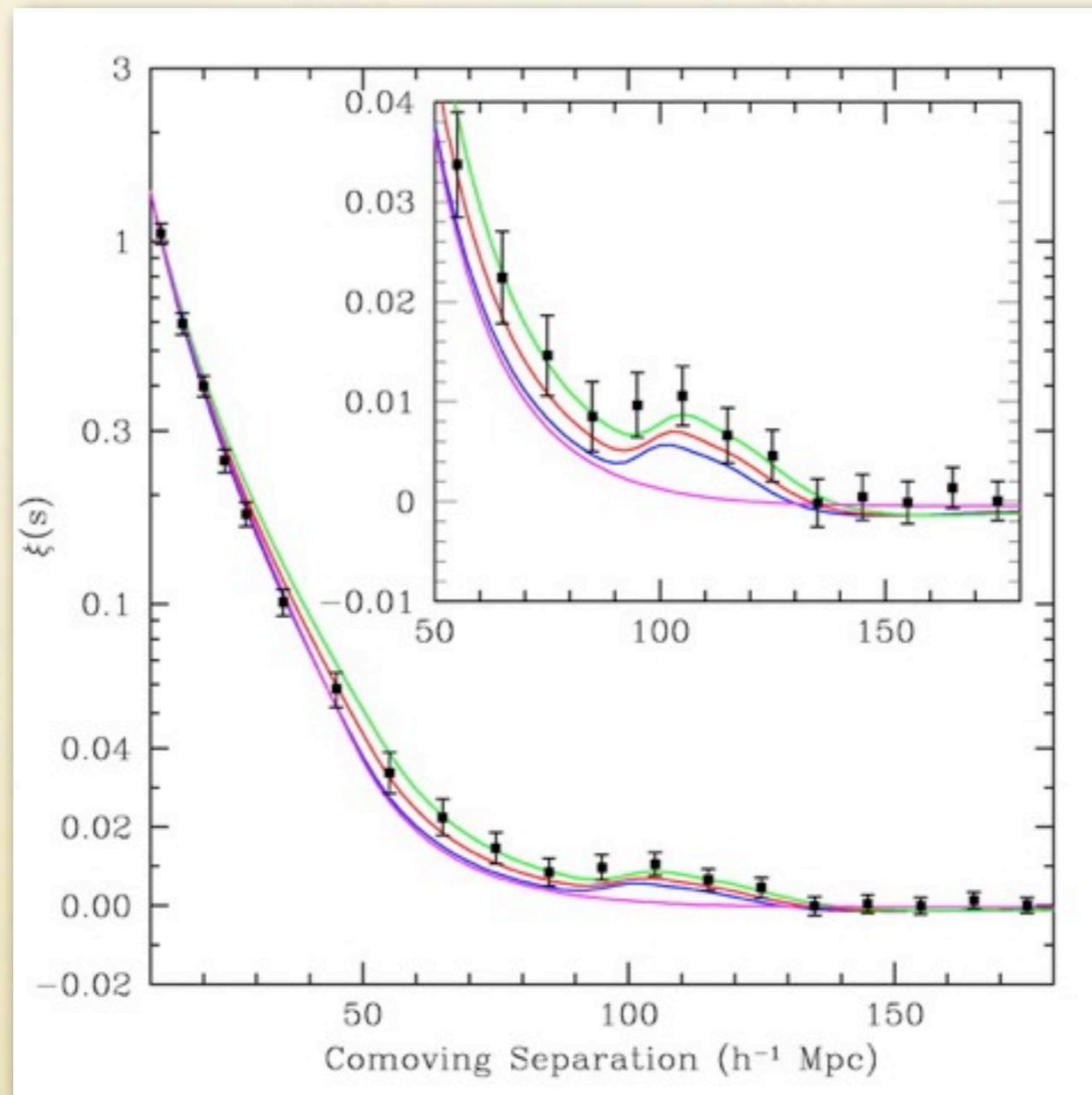
- 例：2dF赤方偏移サーベイにおける方向平均したパワースペクトル



Cole et al. (2005)

# 赤方偏移空間の相関関数

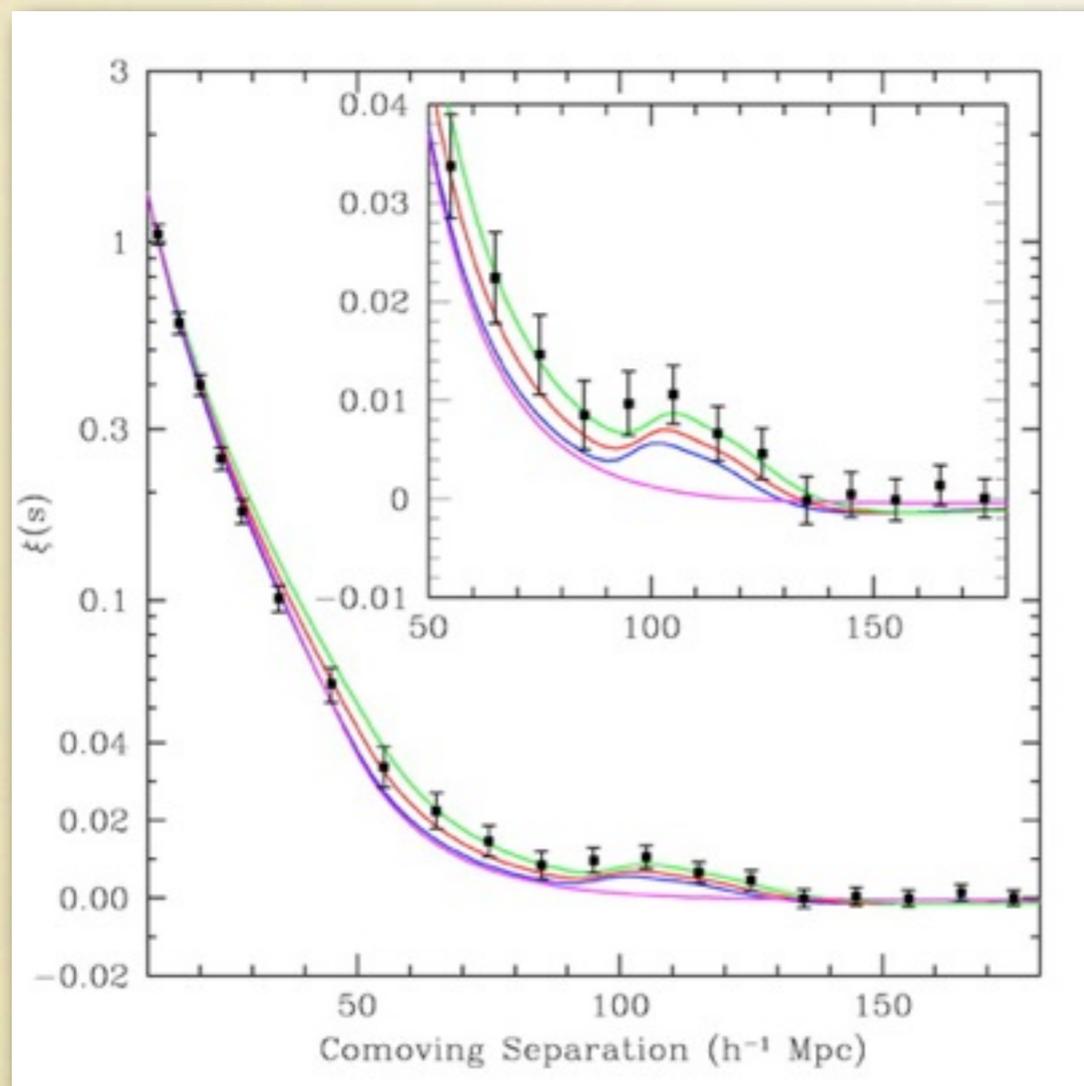
- 例：方向平均した赤方偏移空間の相関関数



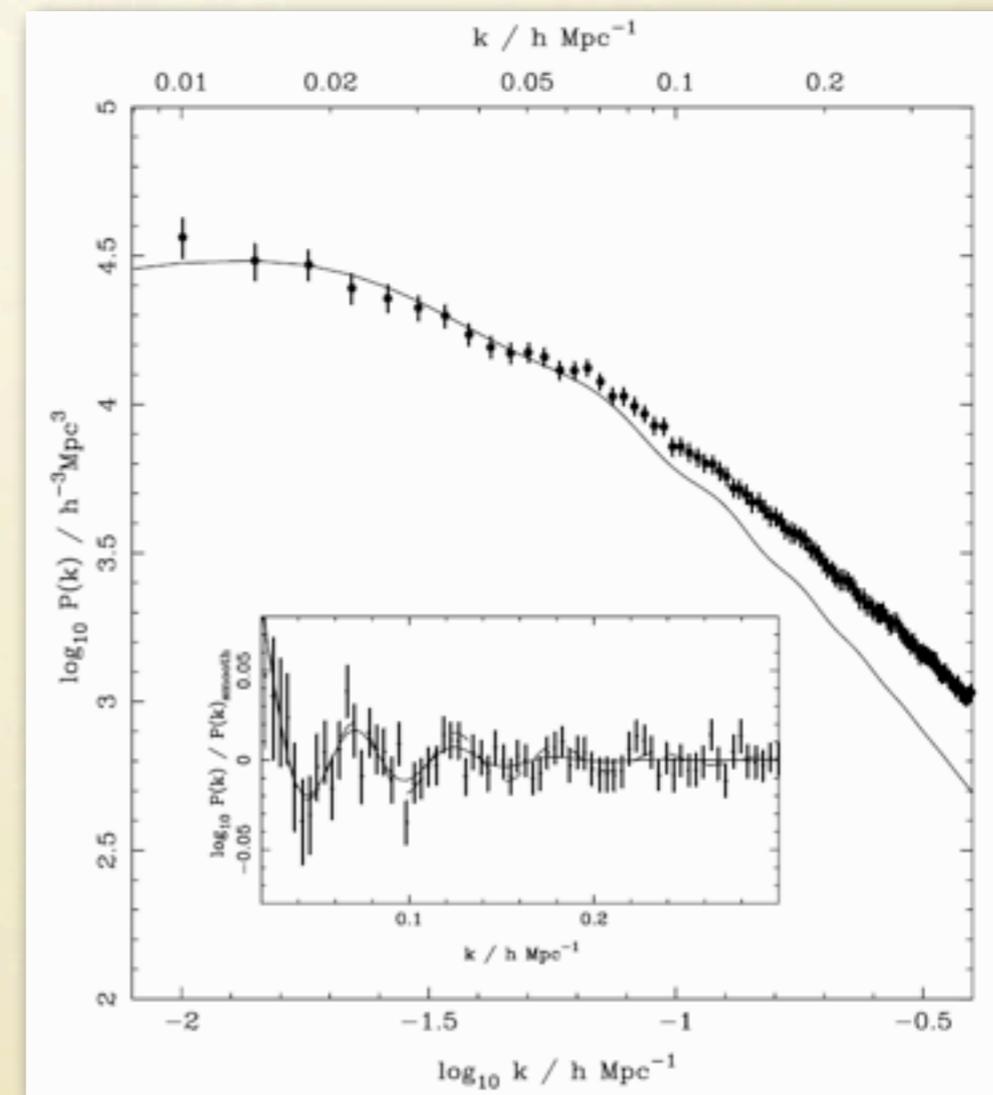
Eisenstein et al. (2005)

# バリオン音響振動による宇宙論

- バリオン音響振動 (BAO) は実際の観測による銀河の相関関数やパワースペクトル中に見いだされている



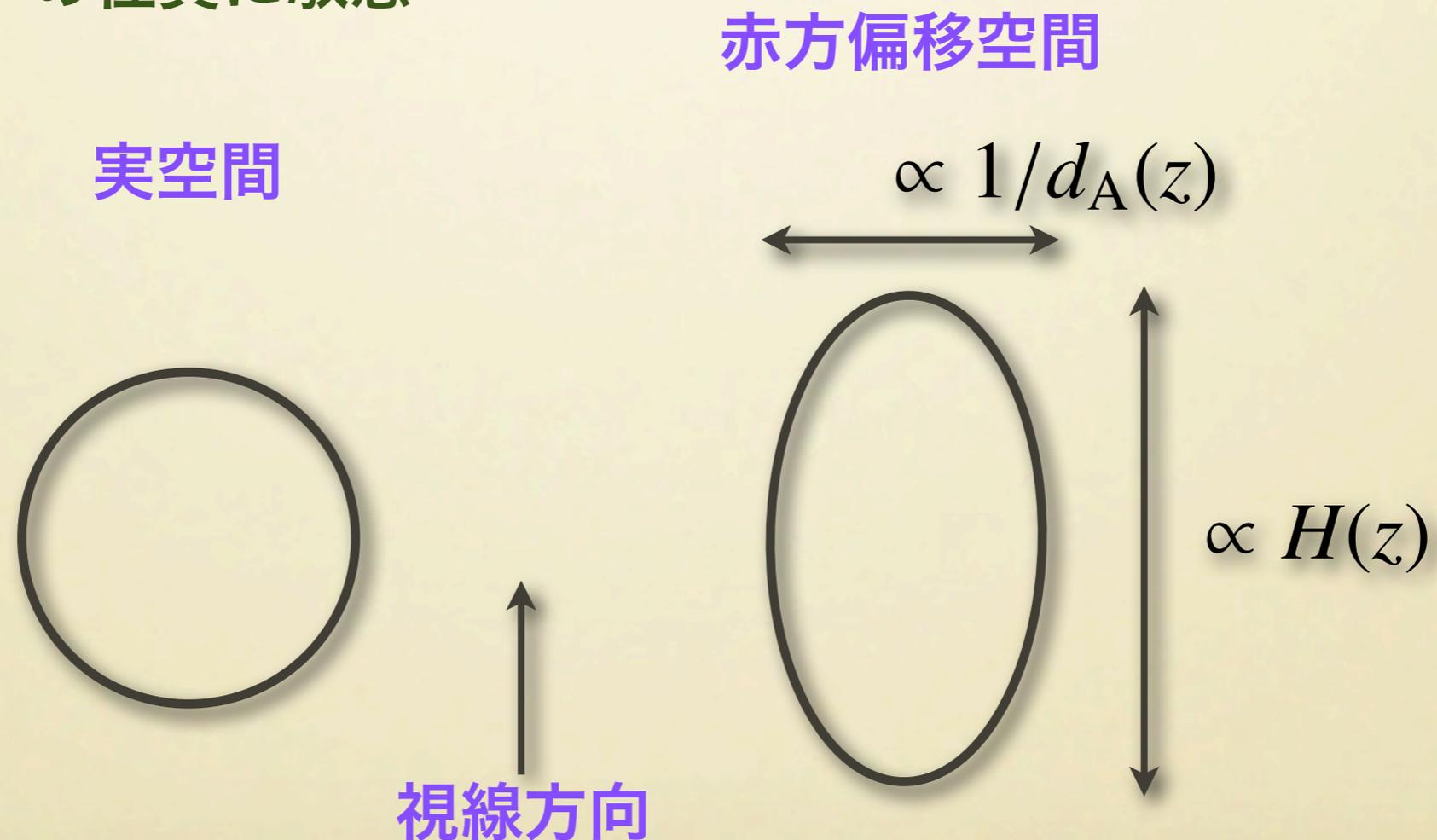
Eisenstein et al. (2005)



Percival et al. (2007)

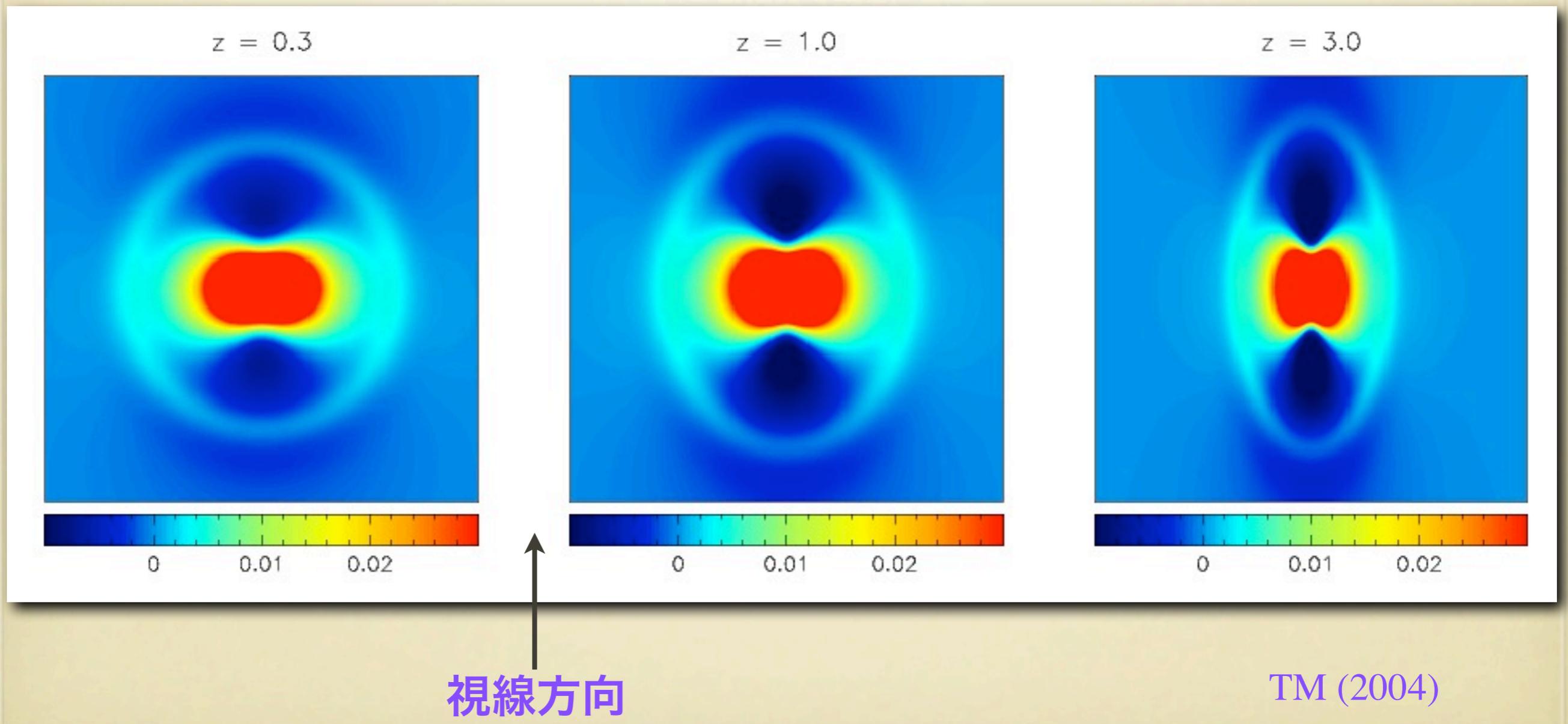
# BAOによるダークエネルギーへの制限

- 銀河の相関における BAO スケールはダークエネルギーの性質に制限を与える
  - BAOスケールを「ものさし」として、高赤方偏移宇宙のハッブル膨張率および角径距離が測定でき、それらはダークエネルギーの性質に敏感



# BAOによるダークエネルギーへの制限

- 例：赤方偏移空間における方向依存する相関関数
  - カイザー効果、BAOリング、幾何学的変形

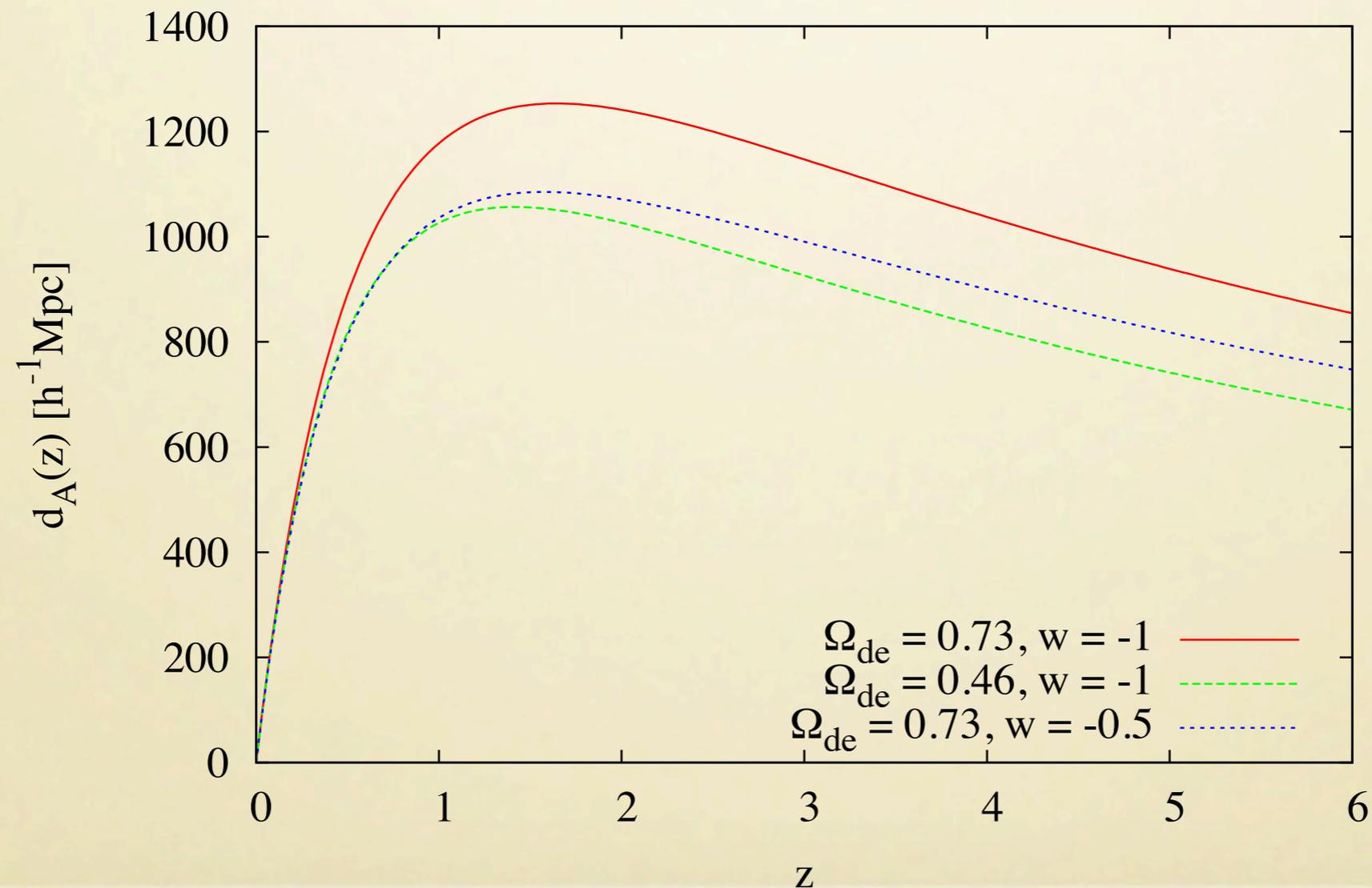


# BAOによるダークエネルギーの制限

- 高赤方偏移宇宙における見かけのBAOサイズはダークエネルギーパラメータに敏感

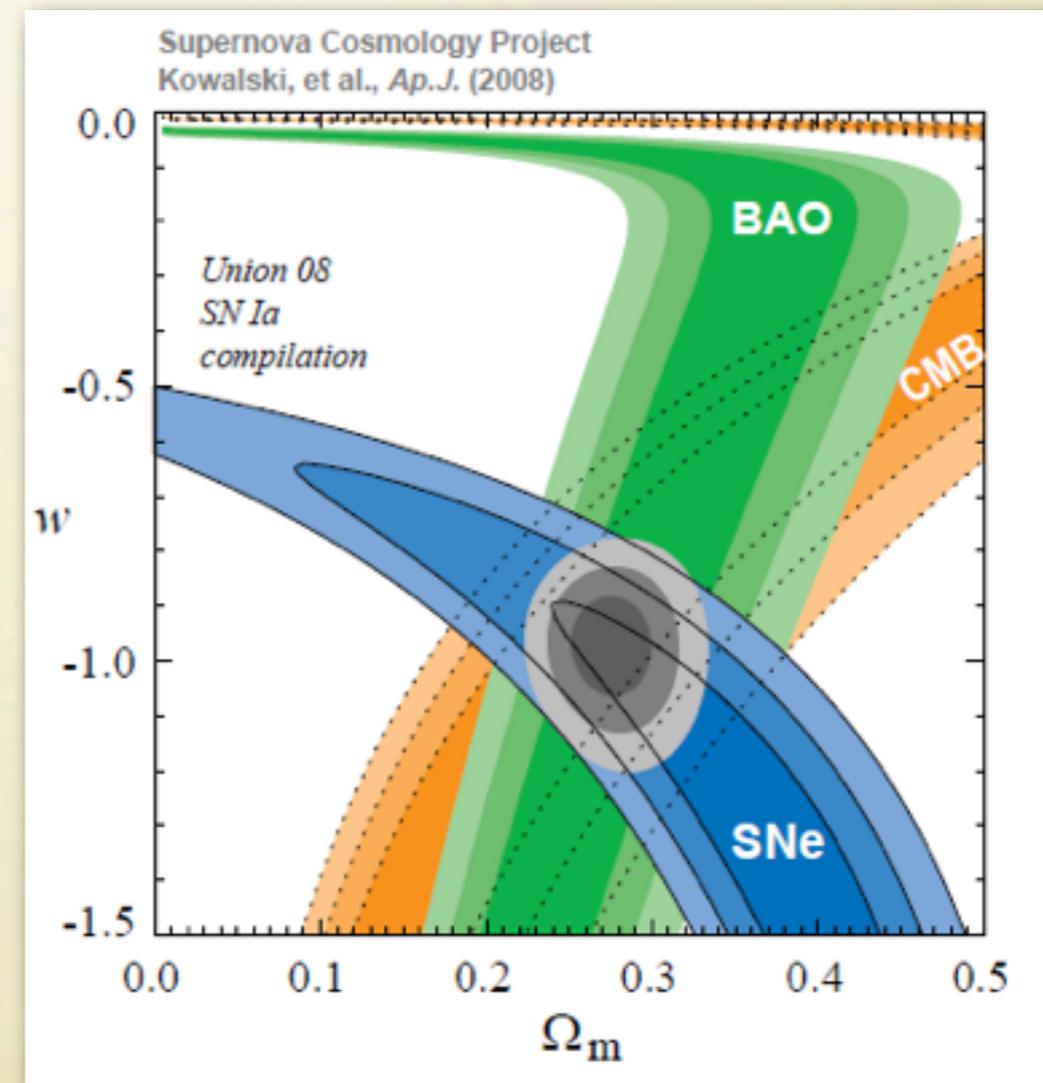
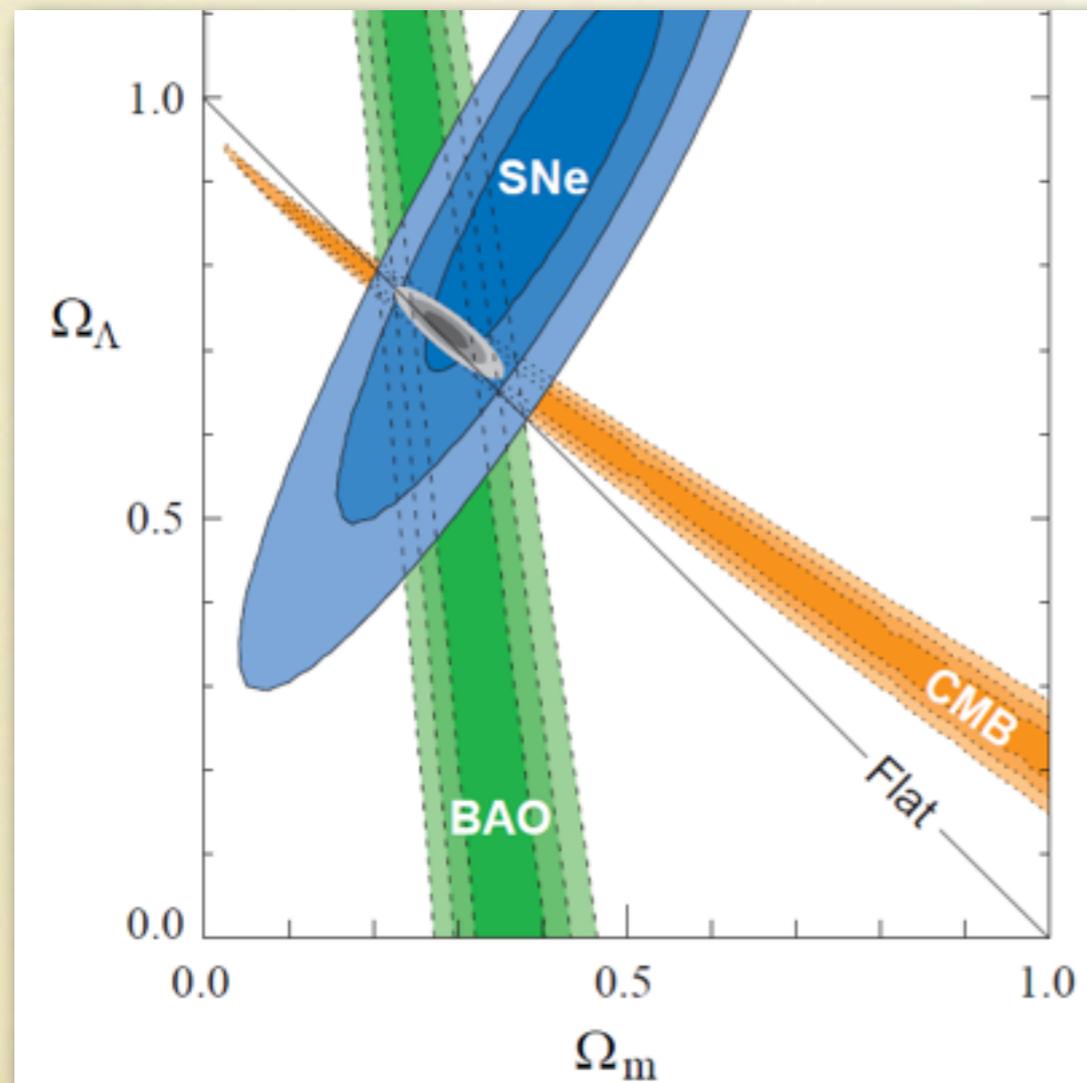
- 例：角径距離とダークエネルギーパラメータ

Angular diameter distance



# 宇宙論におけるBAOの重要性

- BAOはダークエネルギーを含む宇宙論パラメータを決定するのに重要な役割を果たしている
  - Ia型超新星やマイクロ波背景放射に相補的



# 宇宙論におけるBAOの重要性

- BAO は宇宙論パラメータを決定するのに重要な役割を果たしている
  - 例：WMAP7 paper (Komatsu et al. 2010)

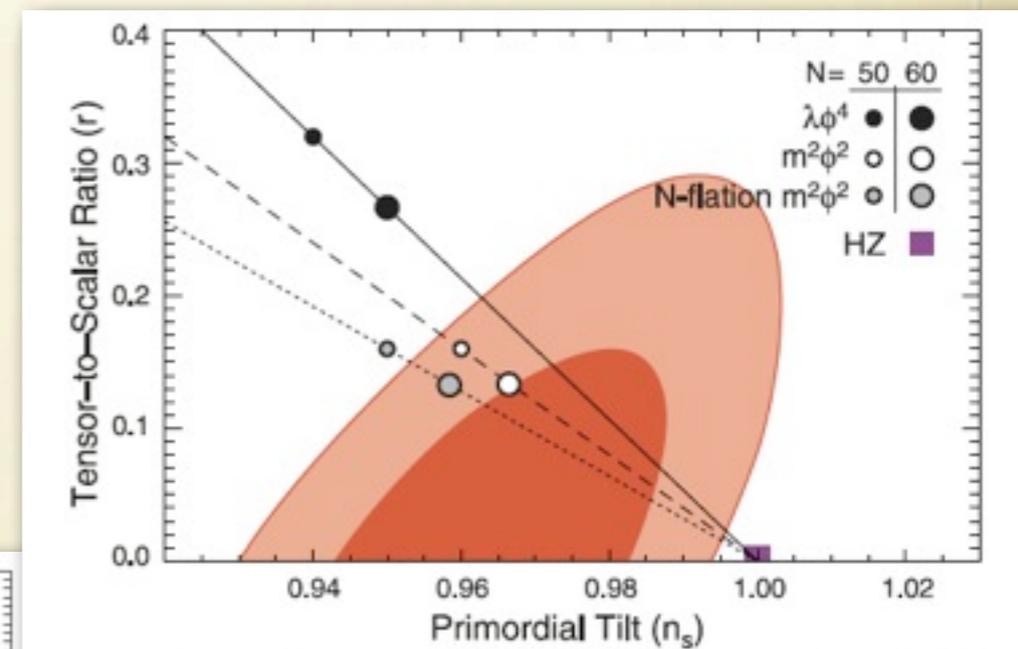
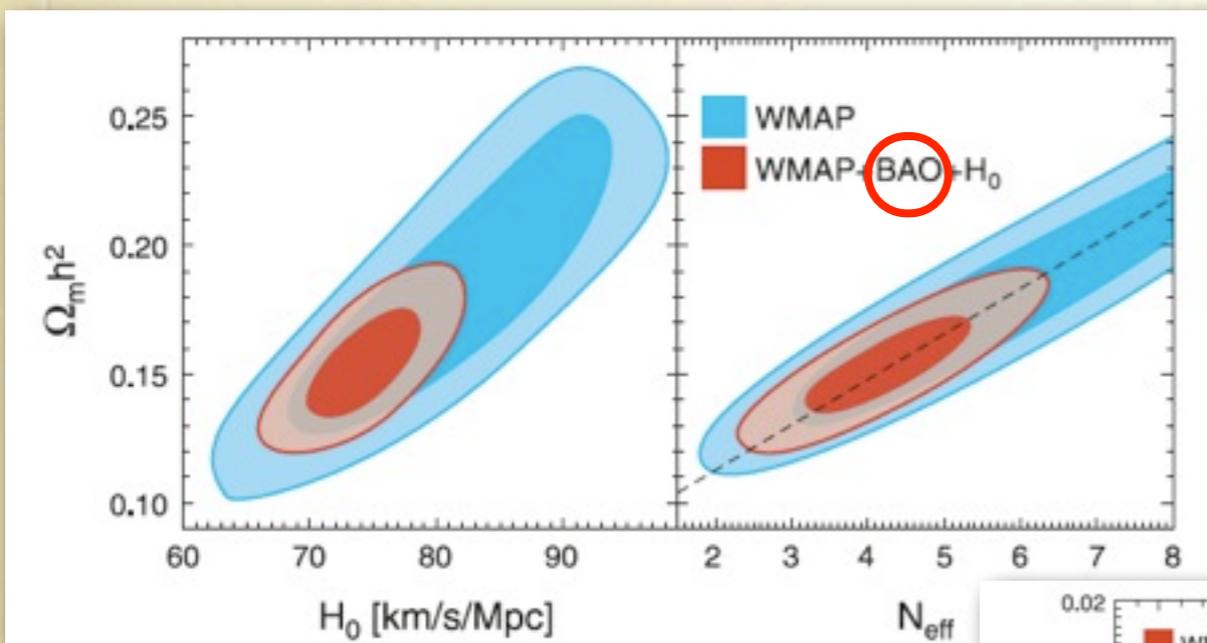
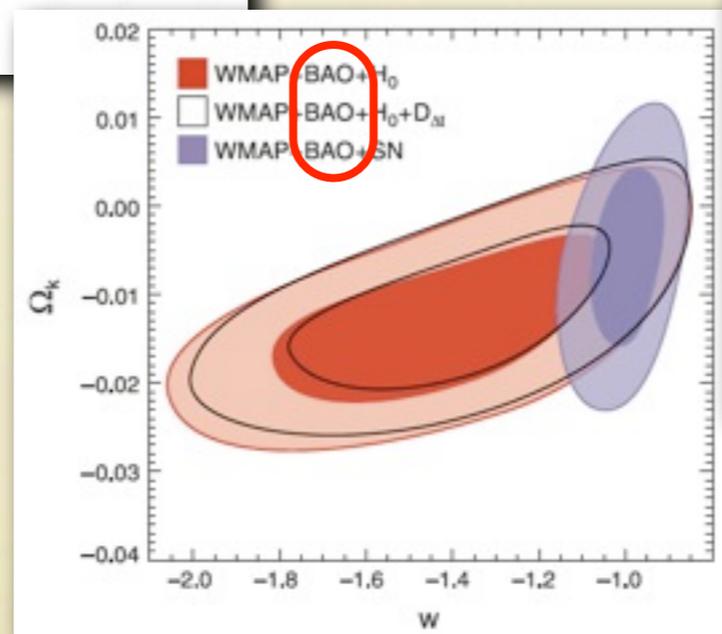
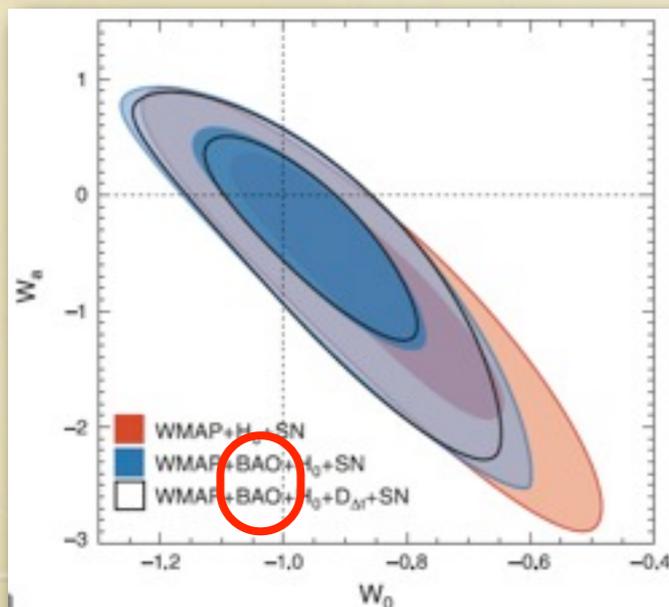


FIG. 19.— Two-dimensional joint marginalized constraint (68% and 95% CL) on the primordial tilt,  $n_s$ , and the tensor-to-scalar ratio,  $r$ , derived from the data combination of WMAP+BAO+ $H_0$ . The symbols show the predictions from “chaotic” inflation models whose potential is given by  $V(\phi) \propto \phi^\alpha$  (Linde 1983), with  $\alpha = 4$  (solid) and  $\alpha = 2$  (dashed) for single-field models, and  $\alpha = 2$  for multi-axion field models with  $\beta = 1/2$  (dotted; Easter & McAllister 2006).



# 宇宙論におけるBAOの重要性

- BAOサーベイは、将来ダークエネルギーを探索するための最も着実な方法（系統誤差が少ない）と考えられている

Survey	Description	Probes	Stage <sup>a</sup>
<i>Ground-based:</i>			
ACT	SZE, 6-m	CL	II
APEX	SZE, 12-m	CL	II
SPT	SZE, 10-m	CL	II
VST	Optical imaging, 2.6-m	BAO, CL, WL	II
Pan-STARRS 1(4)	Optical imaging, 1.8-m(×4)	All	II(III)
DES	Optical imaging, 4-m	All	III
Hyper Suprime-Cam	Optical imaging, 8-m	WL, CL, BAO	III
ALPACA	Optical imaging, 8-m	SN, BAO, CL	III
LSST	Optical imaging, 6.8-m	All	IV
AAT WiggleZ	Spectroscopy, 4-m	BAO	II
HETDEX	Spectroscopy, 9.2-m	BAO	III
PAU	Multifilter imaging, 2-3-m	BAO	III
SDSS BOSS	Spectroscopy, 2.5-m	BAO	III
WMOS	Spectroscopy, 8-m	BAO	III
HSHS	21-cm radio telescope	BAO	III
SKA	km <sup>2</sup> radio telescope	BAO, WL	IV
<i>Space-based:</i>			
<i>JDEM Candidates</i>			
ADEPT	Spectroscopy	BAO, SN	IV
DESTINY	Grism spectrophotometry	SN	IV
SNAP	Optical+NIR+spectro	All	IV
<i>Proposed ESA Missions</i>			
DUNE	Optical imaging	WL, BAO, CL	
SPACE	Spectroscopy	BAO	
eROSITA	X-ray	CL	
<i>CMB Space Probe</i>			
Planck	SZE	CL	
<i>Beyond Einstein Probe</i>			
Constellation-X	X-ray	CL	IV

# 第五部のまとめ

- 銀河サーベイ
  - 1次元、2次元、3次元サーベイ
- 赤方偏移サーベイ
  - 宇宙の密度ゆらぎを探るための3次元マッピング
  - 赤方偏移空間変形
    - カイザー効果、神の指効果
  - BAOサーベイ
    - BAOスケール ( $\sim 100$  Mpc/h) を標準ものさしとしてダークエネルギーを探る手段